

А. И. Островский

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ**

**В ПОПУЛЯРНОМ
ИЗЛОЖЕНИИ**

А. И. ОСТРОВСКИЙ

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПОПУЛЯРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

ПРИ РЕДАКЦИОННОМ УЧАСТИИ
Н. М. БЕСКИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Что такое «начертательная геометрия»?	7
§ 2. Понятие о проекциях	9
§ 3. Основные свойства центральных и параллельных проекций	12
§ 4. Специальные свойства параллельных проекций	14

ЧАСТЬ I

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ (МЕТОД МОНЖА)

ГЛАВА I. ТОЧКА

§ 5. Горизонтальная и вертикальная проекции точки	16
§ 6. Профильная проекция точки	17
§ 7. Связь между положением точки и её проекциями	18
§ 8. Вид сверху. Вид спереди. Вид сбоку	19
§ 9. Изменение проекций точки при изменении её положения	20

ГЛАВА II. ЭПЮРЫ

§ 10. Эпюр двух проекций	22
§ 11. Эпюр трёх проекций	23
§ 12. Ортогональные проекции (метод Монжа)	24
§ 13. Опыт с дверью	24
§ 14. Некоторые частные положения точки	24
§ 15. Проекции линии	25
§ 16. Четыре четверти пространства	26
§ 17. Восемь октантов пространства	27

ГЛАВА III. ПРЯМАЯ

§ 18. Проекция прямой	28
§ 19. Некоторые частные положения прямой	29
§ 20. Длина отрезка и длина его проекций	30
§ 21. Истинная величина отрезка	32
§ 22. Следы прямой	33
§ 23. Взаимное положение двух прямых	34
§ 24. Определение взаимного положения двух прямых по эпюру	35

ГЛАВА IV. ПЛОСКОСТЬ

§ 25. Следы плоскости	38
§ 26. Некоторые частные случаи расположения плоскости	39
§ 27. Третий след плоскости	40
§ 28. Прямая на плоскости	41

§ 29. Точка на плоскости	41
§ 30. Другие способы задания плоскости	43
§ 31. Две стороны плоской фигуры	44
§ 32. Задание плоской фигуры на эюре	45
§ 33. Признак параллельности плоскостей	47
§ 34. Проведение плоскости, параллельной данной (некоторые частные случаи)	48
§ 35. Линия пересечения двух плоскостей, заданных следами	48

ГЛАВА V. РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НА ТОЧКУ, ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

§ 36. Взаимное положение прямой и плоскости	52
§ 37. Лежит ли прямая в плоскости?	53
§ 38. Точка пересечения прямой и плоскости	54
§ 39. Пересечение прямой линии с треугольной пластинкой	55
§ 40. Примеры видимых и невидимых элементов	55
§ 41. Определение видимости на эюре	58
§ 42. Выделение видимых элементов при пересечении прямой с плоскостью	59
§ 43. Пересечение двух треугольных пластинок	61
§ 44. Перпендикулярность прямой и плоскости	65
§ 45. Некоторые сведения из геометрии	65
§ 46. Горизонтالي, фронтالي и линии наибольшего ската плоскости	66
§ 47. Проекция прямого угла	68
§ 48. Проекция окружности	69

ГЛАВА VI. ЭЮРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

§ 49. Проекция пирамиды	71
§ 50. Другие примеры изображения тел	72
§ 51. Различные положения куба	73
§ 52. Двух проекций иногда недостаточно	74
§ 53. Применение метода «сторон пластинок»	76

ГЛАВА VII. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕРХНОСТЯХ И ЛИНИЯХ

§ 54. Конические и цилиндрические поверхности	77
§ 55. Поверхности вращения и тела вращения	78
§ 56. Винтовая линия	80

ГЛАВА VIII. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

§ 57. Получение новых изображений предмета	83
§ 58. Вращение точки и отрезка прямой линии	84
§ 59. Определение истинной величины отрезка способом вращения	87
§ 60. Вращение тела	88
§ 61. Совмещение плоскостей	88
§ 62. Определение истинной величины плоской фигуры способом совмещения	90
§ 63. Вращение плоской фигуры вокруг горизонтали или фронтالي	91
§ 64. Перемена плоскостей проекций	92
§ 65. Некоторые задачи, решаемые методом перемены плоскостей проекций	94
§ 66. Замечание о числе преобразований проекций	96

ГЛАВА IX. РАЗВЁРТКИ

§ 67. Понятие о развёртках	97
§ 68. Получение развёртки по эюру	98
§ 69. Задача о паук и мухе	103
§ 70. Развёртки цилиндра и конуса	104
§ 71. Приближённые развёртки сферы	106
§ 72. Некоторые примеры развёрток	108

ГЛАВА X. ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ТЕЛ

§ 73. Что такое «плоское сечение»?	110
§ 74. Сечения кругового цилиндра	111
§ 75. Сечения кругового конуса	112
§ 76. Сечения призмы и пирамиды проектирующими плоскостями	114
§ 77. Сечение призмы и пирамиды произвольной плоскостью	115
§ 78. Определение видимых и невидимых элементов	117
§ 79. Сечения тел вращения	118
§ 80. Пересечение многогранника прямой линией	121
§ 81. Пересечение треугольной пластинки с призмой и пирамидой	123

ГЛАВА XI. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

§ 82. Понятие о пересечении двух тел	126
§ 83. Простейший случай пересечения многогранников	126
§ 84. Как строить линию сечения двух многогранников	128
§ 85. Общий случай пересечения многогранников	129
§ 86. Пересечение конуса с призмой	132

ГЛАВА XII. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 87. Общие замечания о пересечении кривых поверхностей	134
§ 88. Пересечение сферы с призмой	136
§ 89. Пересечение пирамиды с цилиндром	139
§ 90. Примеры пересечения кривых поверхностей	141
§ 91. Практические примеры	145

ГЛАВА XIII. КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

§ 92. Касательная плоскость	146
§ 93. Проведение касательной плоскости в данной точке поверхности	147
§ 94. Проведение касательной плоскости к поверхности через заданную прямую	149
§ 95. Проведение касательной плоскости к поверхности через заданную точку, не лежащую на поверхности	151
§ 96. Проведение касательной плоскости к конусу или цилиндру параллельно заданной прямой	152
§ 97. Проведение касательной плоскости, параллельной заданной плоскости	153

ГЛАВА XIV. ТЕНИ

§ 98. Геометрия тени	155
§ 99. Тень точки	156
§ 100. Тень отрезка прямой	157
§ 101. Собственная и падающая тени плоской фигуры	160
§ 102. Собственная и падающая тени тела	162
§ 103. Метод обратных лучей	165

ЧАСТЬ II

ДРУГИЕ МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ

ГЛАВА XV. АКСОМЕТРИЯ

§ 104. Достоинства и недостатки метода Монжа	167
§ 105. Наглядные изображения куба в ортогональных проекциях	169
§ 106. Проекция координатных осей	170
§ 107. Понятие об аксонометрии	172
§ 108. Показатели искажения	173

§ 109. Формулы прямоугольной аксонометрии	175
§ 110. Аксонометрические сетки	177
§ 111. Прямоугольные диметрические проекции	181
§ 112. Прямоугольная изометрическая проекция	183
§ 113. Подобно увеличенные аксонометрические проекции	185
§ 114. Основное предложение аксонометрии	187
§ 115. Косоугольные аксонометрические проекции	188
§ 116. Применение различных видов аксонометрических проекций	192
§ 117. Построение теней на аксонометрической проекции	190

ГЛАВА XVI. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

§ 118. Проекция точки	197
§ 119. Изображение поверхностей	197
§ 120. Некоторые примеры из техники	200

ГЛАВА XVII. ПЕРСПЕКТИВА

§ 121. Понятие о перспективе	203
§ 122. Основные термины, применяемые в перспективе	207
§ 123. Основные свойства перспективы	208
§ 124. Построение перспективы по ортогональным проекциям	209
§ 125. Построение перспективы радиальным способом	212
§ 126. Дополнительные указания	216
§ 127. Построения на перспективном чертеже	217
§ 128. Применения перспективы	218

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Что такое «начертательная геометрия»?

Столица нашей Родины Москва украшается замечательными высотными зданиями. Одно из них, построенное на Смоленской площади, показано на рисунке таким, каким оно представится нам, если мы будем смотреть на него со стороны Москвы-реки, находясь метрах в трёхстах к северо-западу от него.

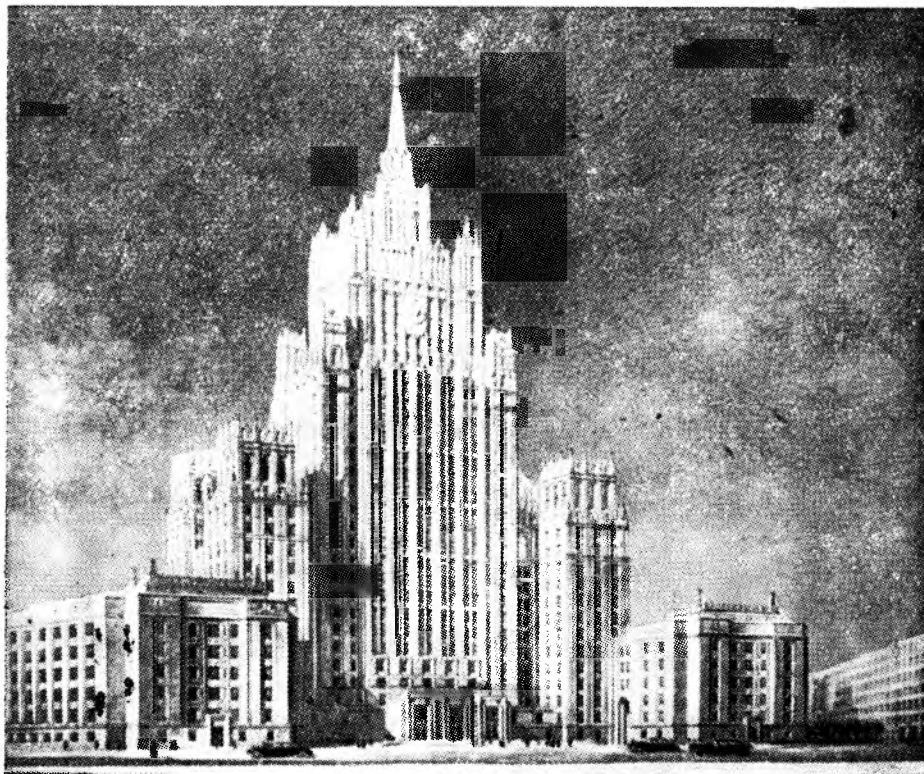


Рис. 1. Высотное здание на Смоленской площади в Москве.

По *рисунку* мы можем судить о том, каков внешний вид этого величественного здания, можем сосчитать число этажей, число окон и т. д., но строить здание по такому рисунку нельзя. В самом деле, на рис. 1 мы видим, что башни здания имеют различную высоту, что крылья здания ниже его центральной части и т. д., но каковы их истинные размеры—об этом по рисунку судить **нельзя**.

На рис. 2 показан *главный фасад* этого же здания таким, каким он представлялся бы нам с очень большого расстояния. Теперь можно точно определить по масштабу высоту каждой части здания, форму и размеры каждого окна, выходящего на главный фасад, и т. д.

Но это изображение не даёт ответа на целый ряд других весьма важных вопросов: какова ширина каждого корпуса? как расположены боковые башни по отношению к центральной башне? и т. д.



Рис. 2. Фасад высотного здания на Смоленской площади в Москве.

На эти вопросы отвечает *план* здания; на рис. 3 показан план одного из этажей средней части здания.

Для того чтобы построить здание, нужно предварительно создать несколько тысяч *чертежей* с изображениями различных элементов здания.

При помощи чертежа можно точно изобразить любой предмет—от коробки спичек или гайки до доменной печи или гидроэлектростанции. При этом, несмотря на то, что чертёж—*плоский, двумерный* (лист бумаги имеет только два измерения—длину и ширину), на нём изображаются предметы *пространственные, трёхмерные*.

Чертёж, однако, уступает рисунку в наглядности, так как изображает предметы не совсем такими, какими воспринимает их наш глаз.

Чертёж необходим техникам всех специальностей. При помощи чертежа проектировщик—будь то архитектор, конструктор, изобретатель—говорит каменщикам, плотникам, токарям, разметчикам, слесарям, сварщикам, каковы *форма и размеры* каждой отдельной детали изделия, здания, машины и каково *взаимное расположение* отдельных элементов конструкции, сооружения.

Наука, изучающая способы изображения любых предметов, называется *начертательной геометрией*.

Читатель, приступающий к изучению начертательной геометрии, должен быть знаком с элементарной геометрией в объёме средней школы.

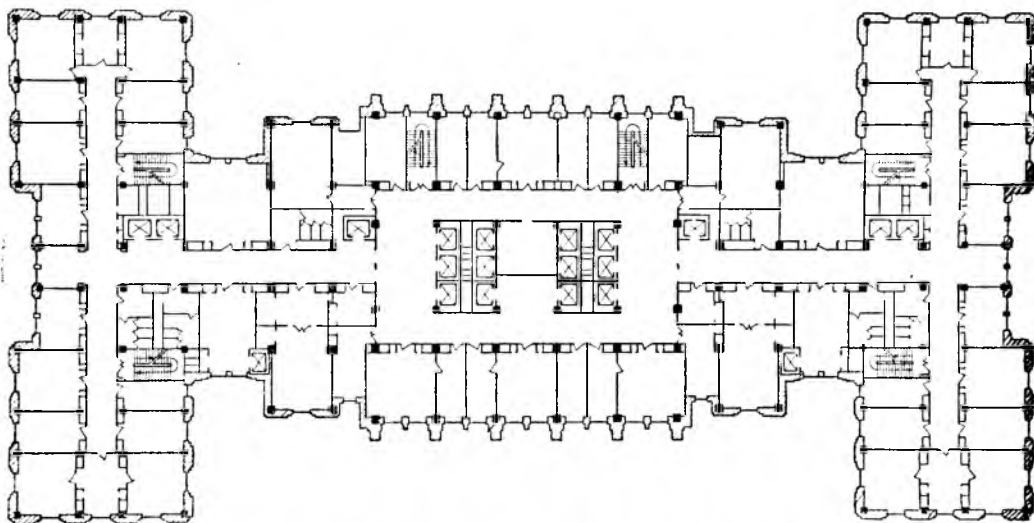


Рис. 3. План одного из этажей высотного здания на Смоленской площади в Москве.

Следует отметить, что в начертательной геометрии сравнительно мало новых терминов, теорем, доказательств. Учить наизусть здесь почти ничего не придётся; «зубрить» начертательную геометрию совершенно бесполезно. Её нужно *понимать*. Для облегчения усвоения материала в книге приведены наглядные примеры, взятые часто из обыденной жизни. Кроме этих примеров читатель найдёт в окружающей обстановке и в своей практической деятельности множество других случаев применения начертательной геометрии.

Для того чтобы не только понять, но и твёрдо усвоить основы начертательной геометрии, необходимо самостоятельно сделать все упражнения, помещённые в книге*).

Так как большинство задач начертательной геометрии может быть решено различными путями, необходимо выбирать из них каждый раз тот, который является в данной задаче кратчайшим.

§ 2. Понятие о проекциях

Поставьте на стол электрическую лампу и направьте её лучи на стену. Станьте у стены и сложите пальцы рук так, как показано на рис. 4. На стене появится отбрасываемая от рук тень, похожая на тень головы собаки.

Для получения изображения на экране между ним и источником света помещают киноленту с отпечатанными на ней фотоснимками.

*) При решении задач следует перечертить задание, увеличив рисунок в 2—3 раза.

Попросите своего товарища посидеть спокойно одну минутку между лампой и экраном из тонкой, но прочной бумаги. Мягким карандашом или углём обведите контур тени — получите *силуэт**) головы вашего товарища.



Рис. 4. Как получить на стене тень головы собаки.

Возьмём некоторую точку S и некоторую плоскость P , не проходящую через эту точку. Точка a , в которой прямая, проходящая через S и заданную точку A пространства, пересекает плоскость P , называется *центральной проекцией* точки A из центра S на плоскость P (рис. 5).

Условились говорить: *точка A проектируется из точки S в точку a плоскости P* . Точка A — *оригинал*, точка a — его *проекция*, прямая Saa — *проектирующая прямая* (или *проектирующий луч*), плоскость P — *плоскость проекций*.

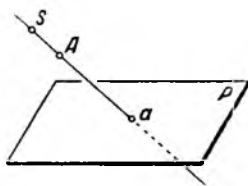


Рис. 5. Центральная проекция точки на плоскость.

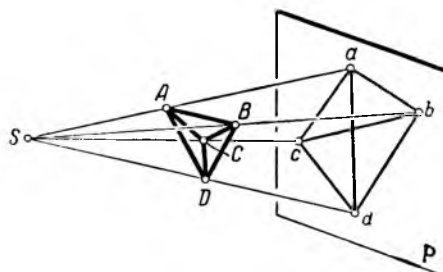


Рис. 6. Центральная проекция тела на плоскость.

Чтобы спроектировать тело, надо спроектировать все его точки. Например, тело $ABCD$ (треугольная пирамида — рис. 6) проектируется из точки S на плоскость P в виде фигуры $abcd$. Тело $ABCD$ — *оригинал*, фигура $abcd$ — его *центральная проекция*.

Несколько примеров проектирования было рассмотрено выше («собака» на стене, изображение на экране, силуэт); приведём ещё один пример.

Прицеливаясь из винтовки, стрелок *проектирует* целик и мушку под яблоко мишени (рис. 7).

*) Любопытно происхождение слова «силуэт». В середине XVIII века во Франции при Людовике XV был министр финансов Э. де-Силуэт; на него была нарисована карикатура в виде теневого профиля. Отсюда и пошло на разных языках слово *силуэт*.

Кроме рассмотренных выше центральных проекций существуют ещё *параллельные проекции*. Этот способ проектирования отличается тем, что проектирующие лучи проводятся не через фиксированную точку, а *параллельно* друг другу, т. е. по *фиксированному направлению*.

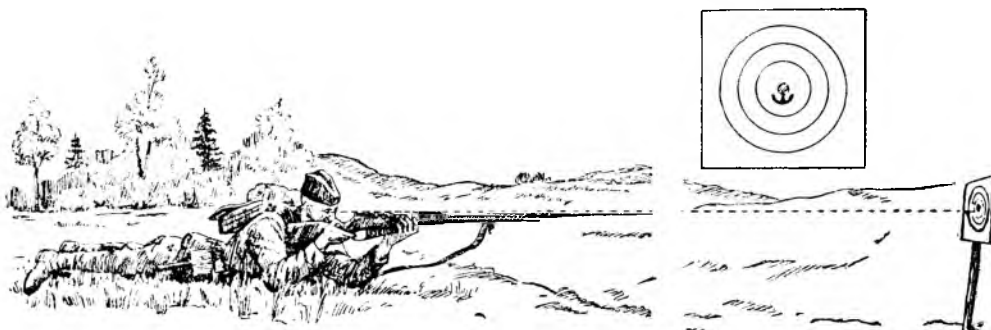


Рис. 7. Проектирование при стрельбе из винтовки.

Для того чтобы можно было строить проекции точек, необходимо задать: при центральном проектировании плоскость проекций и центр проекций,

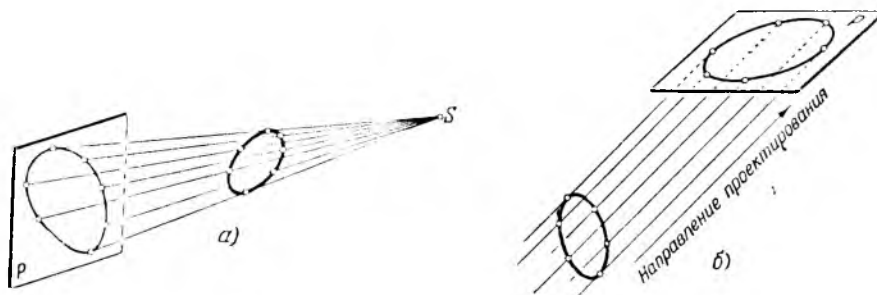


Рис. 8. а) Центральное проектирование, б) параллельное проектирование.

а при параллельном проектировании — плоскость проекций и направление проектирования (рис. 8).

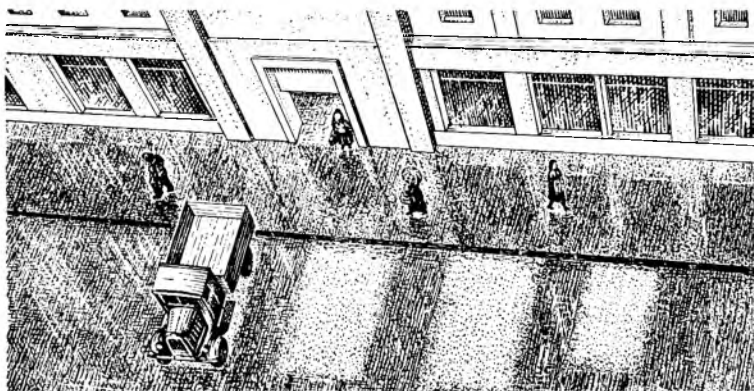


Рис. 9. После дождя.

На улице стояли четыре автомашины. Пошел дождь. После дождя три машины уехали (рис. 9). Сколько среди уехавших машин было легковых и сколько грузовых?

Назовите, что в этом примере является:

- 1) плоскостью проекций,
- 2) оригиналами,
- 3) проекциями,
- 4) проектирующими лучами.

Можно ли узнать по рис. 9, какова была высота машин?

При центральном проектировании произвольной кривой проектирующие лучи образуют *коническую* поверхность; поэтому центральное проектирование называется также *коническим*.

При параллельном же проектировании произвольной кривой проектирующие лучи образуют *цилиндрическую* поверхность; поэтому параллельное проектирование называется также *цилиндрическим*.

Какой из разрывов ближе к самолёту—*L*, *M* или *N* (рис. 10)?

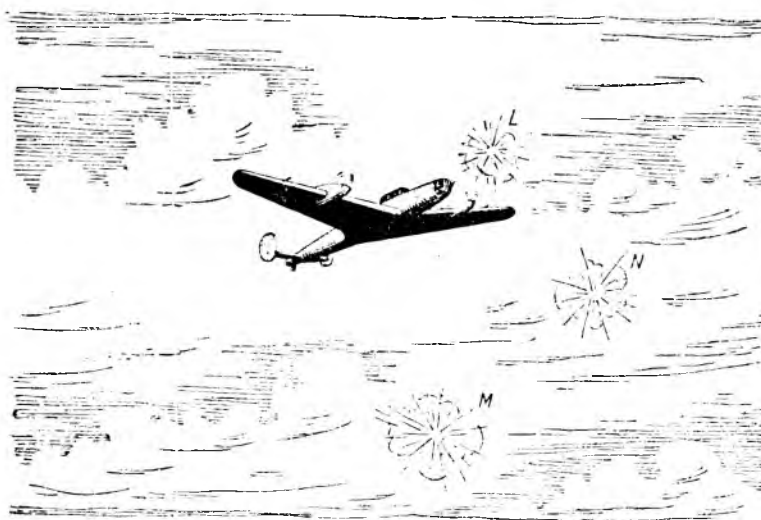


Рис. 10. Какой из разрывов ближе к самолёту?

Нельзя утверждать, что *L* ближе к самолёту, чем *M*; может быть, *L* гораздо дальше, чем *M*.

Возьмите в левую руку иголку с большим ушком и вытяните руку вперёд; поверните иголку так, чтобы отверстие ушка оказалось сбоку; в правую руку возьмите нитку; закройте левый глаз и попытайтесь продеть нитку в иголку; после нескольких бесплодных попыток вы убедитесь, что одной проекции бывает недостаточно.

Между прочим, два глаза необходимы и для того, чтобы оценивать расстояния.

Из последних трёх примеров (с автомашинами, с самолётом, с иголкой) ясно, что одной проекции недостаточно, чтобы составить полное представление об оригинале. Поэтому обычно пользуются двумя или даже тремя проекциями одного и того же оригинала.

§ 3. Основные свойства центральных и параллельных проекций

1. Если даны:

- 1) плоскость проекций и
- 2) центр проекций (при центральном проектировании) или направление проектирования (при параллельном проектировании), то каждая точка (а сле-

довательно, и линия) пространства имеет на плоскости проекций одну единственную, вполне определённую проекцию *).

Но каждая точка (а следовательно и линия) на плоскости проекций является проекцией бесчисленного множества точек (или линий) пространства.

В самом деле, все точки, лежащие на одном проектирующем луче, имеют одну общую проекцию. На рис. 11 точки A_1, A_2, A_3 имеют одну общую проекцию a^{**}), поэтому по одной проекции нельзя установить положения самой точки (или линии). Это можно кратко формулировать так: *оригинал определяет проекцию, но проекция не определяет оригинала.*

Яблоко A уже совсем созрело: оно вот-вот упадёт; если не будет ветра, оно будет падать вертикаль-

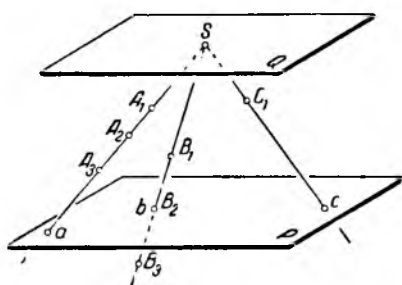


Рис. 11. Точки, лежащие в плоскости Q , не имеют центральных проекций.

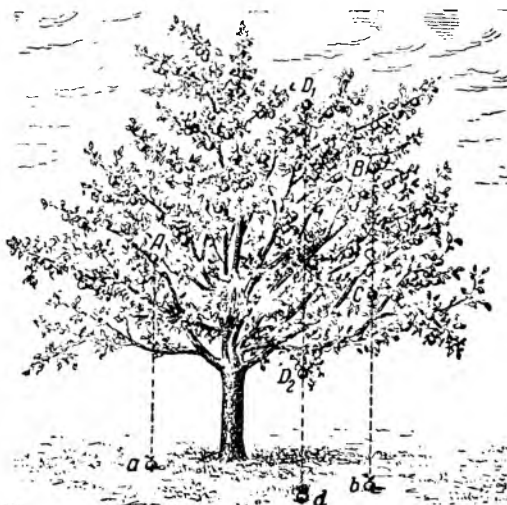


Рис. 12. Откуда упало яблоко D ?

но и упадёт в точку a (рис. 12). Яблоко B упадёт в точку b ; яблоко C упадёт в ту же точку b , так как точки B и C находятся на одной отвесной прямой. Откуда упало яблоко D ? Если даже мы точно знаем, что оно упало в безветренную погоду, то мы можем утверждать лишь, что оно созрело где-то на вертикальной прямой, проходящей через точку d (точнее—на участке $D_1 D_2$).

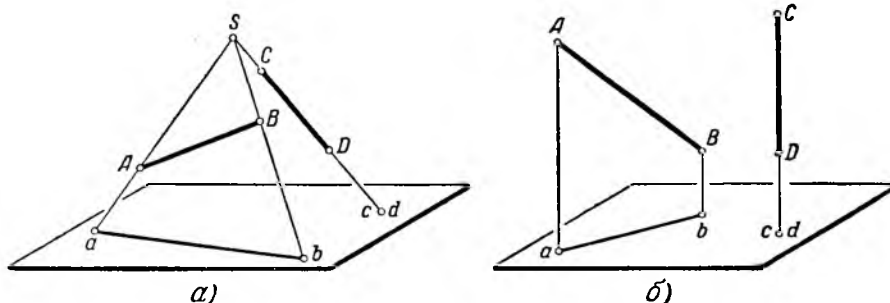


Рис. 13. Проекция прямой—прямая.

II. При проектировании прямой линии лучи, проектирующие точки прямой, образуют плоскость, которая называется *проектирующей плоскостью*. Так как пересечение любых двух плоскостей—прямая линия, то проектирующая плоскость пересекается с плоскостью проекций по прямой линии; следовательно, *проекция прямой линии—прямая линия* (рис. 13).

*) При центральном проектировании точки, лежащие в плоскости Q , проходящей через центр проекций и параллельной плоскости проекций P , являются исключением: они не имеют проекций (рис. 11).

**) Заметим, что проекции точек, лежащих в плоскости проекций, совпадают с самими точками. Так, на рис. 11 проекция b точки B_2 совпадает с этой же точкой.

Из этого правила имеются следующие исключения:

Если при центральном проектировании проектируемая прямая проходит через центр проекций (прямая CD на рис. 13, а), то её проекцией оказывается точка.

Если при параллельном проектировании проектируемая прямая параллельна направлению проектирования, то проекцией прямой оказывается точка (прямая CD на рис. 13, б).

В последних двух случаях говорят: *прямая спроектировалась в точку*.

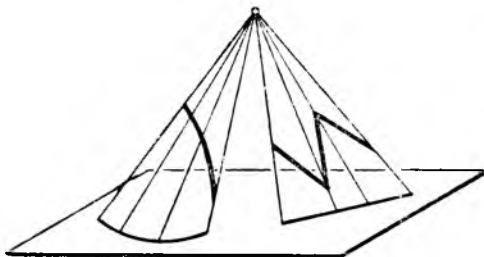


Рис. 14. Примеры центрального проектирования.

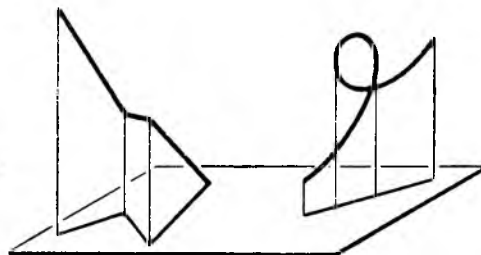


Рис. 15. Примеры параллельного проектирования.

Ни кривая, ни ломаная линия спроектироваться в точку не могут. В общем случае кривая проектируется в кривую, а ломаная—в ломаную, но плоская кривая (или плоская ломаная) может спроектироваться в прямую или отрезок. Это будет в том случае, когда кривая (или ломаная) лежит в проектирующей плоскости.

Например, на рис. 14 (центральная проекция) кривая спроектировалась в кривую, а плоская ломаная—в отрезок прямой. На рис. 15 (параллельная проекция) ломаная спроектировалась в ломаную, а плоская кривая—в отрезок прямой.

III. Если точка лежит на некоторой линии, то при любом проектировании проекция точки лежит на проекции линии.

На рис. 16 точка B лежит на отрезке AC и точка b —на отрезке ac .

Рис. 16. Проекция точки, лежащей на линии, и проекция многоугольника.

IV. Проекция плоского многоугольника—многоугольник с тем же числом сторон (на рис. 16—треугольник); если плоскость многоугольника является в то же время и проектирующей плоскостью, то его проекция—отрезок.

§ 4. Специальные свойства параллельных проекций

В этой книге мы будем заниматься главным образом параллельными проекциями.

Кроме тех основных свойств, которые являются общими для центральных и параллельных проекций (эти свойства были рассмотрены в предыдущем параграфе), параллельные проекции обладают ещё некоторыми специальными свойствами, а именно:

I. Любая линия (кривая или ломаная), лежащая в плоскости, параллельной плоскости проекций, проектируется на неё без всякого искажения, т. е. в натуральном виде (рис. 17).

II. Если прямая I параллельна прямой II (рис. 18), то проектирующая плоскость Q параллельна проектирующей плоскости R ; прямые 1 и 2, получающиеся при пересечении плоскостью проекций P проектирующих плоскостей

Q и R , взаимно параллельны. Поэтому проекции двух параллельных прямых взаимно параллельны.

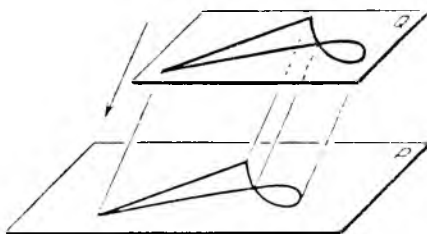


Рис. 17. Линия проецируется без искажения (плоскости P и Q параллельны).

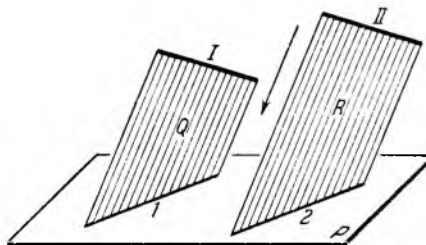


Рис. 18. Проекции параллельных прямых.

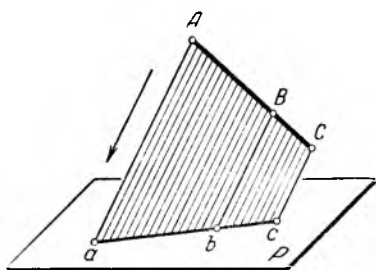


Рис. 19. Отношение отрезков одной прямой не изменяется при параллельном проектировании $\frac{ab}{bc} = \frac{AB}{BC}$.

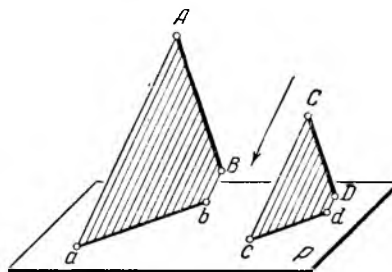


Рис. 20. Отношение параллельных отрезков равно отношению их проекций $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$.

III. Так как любые две прямые, лежащие в одной плоскости, делятся пересекающимися их параллельными прямыми на пропорциональные отрезки (рис. 19), то

$$AB : BC = ab : bc,$$

т. е. отношение отрезков прямой линии равно отношению проекций этих отрезков.

IV. Нетрудно также доказать, что отношение отрезков двух параллельных прямых равно отношению проекций этих отрезков (рис. 20):

$$AB : CD = ab : cd.$$

V. Различают *прямоугольные* и *косугольные* параллельные проекции в зависимости от угла, образованного направлением проектирования и плоскостью проекций (рис. 21):

1) проекция—*прямоугольная*, если направление проектирования перпендикулярно к плоскости проекций, и

2) проекция—*косугольная*, если направление проектирования наклонно (т. е. не перпендикулярно) к плоскости проекций.

Прямоугольные проекции называются иначе *ортогональными**; эти проекции чаще всего применяются в технике; к их изучению мы сейчас и переходим.

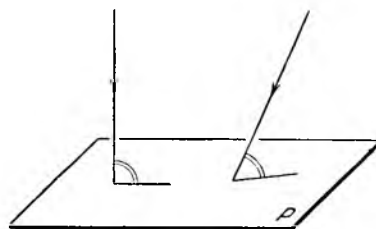


Рис. 21. Прямоугольные и косугольные проекции.

*) От греческих слов: «ortos»—прямой, «gonia»—угол.

ЧАСТЬ I

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ (МЕТОД МОНЖА)

ГЛАВА I

ТОЧКА

§ 5. Горизонтальная и вертикальная проекции точки

Я держу в руке мяч, условно представляющий геометрическую точку A (рис. 22, а). Что нужно сделать для того, чтобы я мог завтра поместить мяч точно в то же самое место? Каким образом зафиксировать (закрепить, точно установить) положение точки A в пространстве?

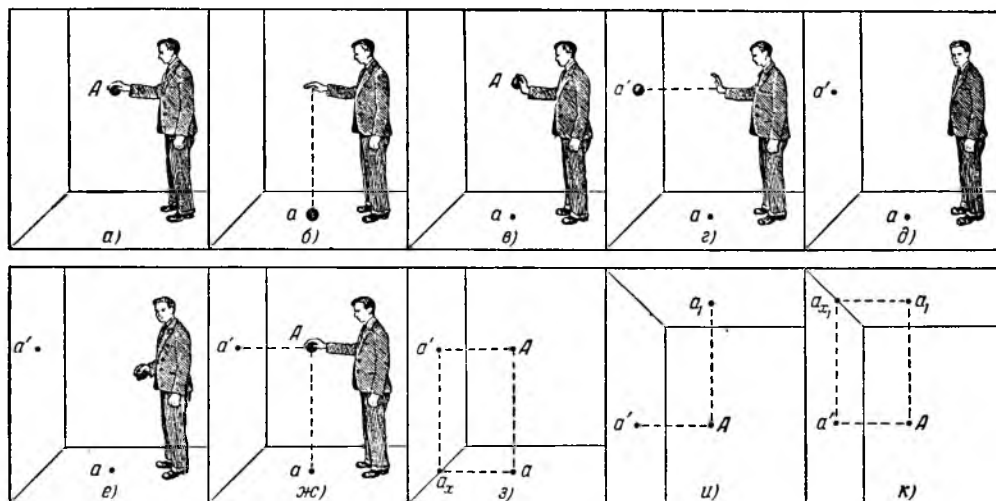


Рис. 22. Проекция мяча на пол и стены.

Отпущу мяч (рис. 22, б). Падая по вертикальной прямой, он попадёт на пол в точку, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки A на горизонтальную плоскость пола. Не сдвигая руки, я попрошу отметить эту точку на полу и назову её буквой a .

Точка a —это
ортогональная (прямоугольная) проекция точки A на горизонтальную плоскость,

или короче:

горизонтальная проекция точки A .

Теперь попрошу подать мне мяч. Когда он окажется в прежнем положении— в точке A (рис. 22, в), брошу мяч горизонтально, перпендикулярно к той стене, которая находится как раз передо мной (рис. 22, г).

Мяч встретит стену в точке, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки A на стену *). Отметим эту точку на стене и назовём её буквой a' .

Точка a' —это
ортогональная (прямоугольная) проекция точки A на вертикальную плоскость,

или короче:

вертикальная проекция точки A .

Этих двух меток на полу и на стене, т. е. этих двух проекций a и a' точки A (рис. 22, δ), нам вполне достаточно для того, чтобы завтра, или даже через год, точно определить, где находился мяч, т. е. восстановить положение точки A в пространстве.

Как это сделать? (рис. 22, e).

Точка A должна лежать одновременно на перпендикуляре к полу в точке a и на перпендикуляре к стене в точке a' , т. е. она является точкой пересечения этих перпендикуляров (рис. 22, $ж$).

Точка A найдена по двум её проекциям на две плоскости.

Здесь пол—*горизонтальная плоскость проекций*, а стена—*вертикальная плоскость проекций*.

Если мы опустим из точки a перпендикуляр на вертикальную плоскость проекций, а из точки a' —на горизонтальную плоскость проекций, то оба перпендикуляра (рис. 22, $з$) встретятся в точке a_x **) на плинтусе—на прямой линии, по которой встречаются плоскости проекций: пол и стена.

Метка на полу вряд ли долго сохранится; нельзя ли заменить выбранную нами горизонтальную плоскость проекций (т. е. пол) другой?

Можно. Бросим мяч из той же точки A вертикально вверх; точку, в которой он ударится в потолок, обозначим буквой a_1 (рис. 22, $и$).

Две проекции a_1 и a' точки A также вполне определяют положение точки A в пространстве.

Перпендикуляр, опущенный из точки a_1 на стену, и перпендикуляр, опущенный из точки a' на потолок (рис. 22, $к$), встречаются в точке a_{x1} на карнизе—на прямой линии, по которой пересекаются плоскость потолка и плоскость стены.

§ 6. Профильная проекция точки

Иногда бывает нужна ещё одна вертикальная проекция точки.

Как и в предыдущем параграфе, сначала отпущу мяч A , который упадёт на пол в точку a —горизонтальную проекцию (рис. 23, a).

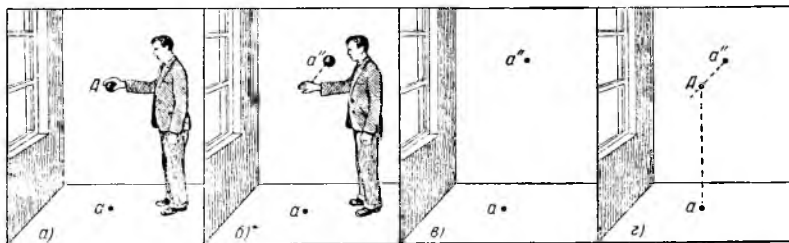


Рис. 23. Ещё одна вертикальная (профильная) проекция мяча.

Затем брошу мяч снова горизонтально, но на этот раз перпендикулярно к боковой (правой) стене: мяч встретит её в точке a'' (рис. 23, $б$).

*) Мы здесь для простоты полагаем, что мяч полетит по прямой; на самом деле он пойдёт по кривой линии, но при небольшом расстоянии до стены и достаточно сильном толчке можно считать путь мяча прямолинейным.

**) Почему для этой точки принято такое странное, на первый взгляд, обозначение « a_x »—станет ясно позже (см. § 11).

Точка a'' —это ортогональная (прямоугольная) проекция точки A на профильную (вторую вертикальную) плоскость, или короче:

профильная проекция точки A .

Двух проекций a и a'' точки A (рис. 23, в) вполне достаточно для нахождения положения точки в пространстве уже известным нам способом (рис. 23, г).

В комнате четыре стены, пол и потолок—всего шесть плоскостей. Любые две из них (кроме двух противоположных—параллельных друг другу) можно принять за плоскости проекций. Тогда по двум проекциям точки можно восстановить положение точки в пространстве. Ясно, что проекции любой точки на любые две плоскости обладают следующим свойством: перпендикуляры, опущенные из каждой проекции точки на прямую, по которой пересекаются обе плоскости проекций, встречаются на этой прямой в одной точке.

Эта прямая называется осью проекций.

§ 7. Связь между положением точки и её проекциями

Мы видели, что положение точки в пространстве вполне определено, если даны её проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости. Часто рассматриваются одновременно три плоскости проекций, из которых каждые две перпендикулярны друг к другу. Такие основные плоскости проекций (рис. 24) называются:

- 1) горизонтальная плоскость проекций; её обозначают латинской буквой H^*);
- 2) вертикальная плоскость проекций; её обозначают буквой V^{**});
- 3) профильная (вторая вертикальная) плоскость проекций; её обозначают буквой W^{***}).

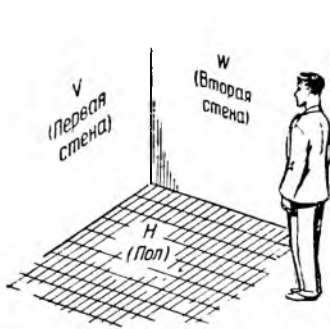


Рис. 24. Три плоскости проекций

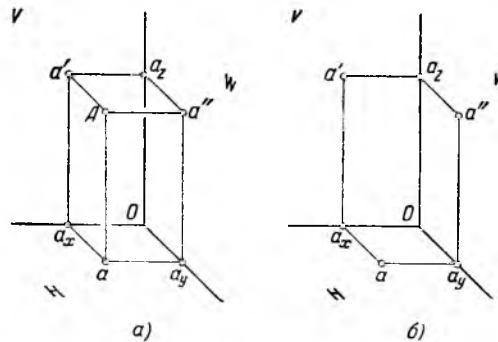


Рис. 25. Проектирующие отрезки.

Три перпендикуляра Aa , Aa' и Aa'' (рис. 25, а), опущенные из точки A на горизонтальную, вертикальную и профильную плоскости проекций, являются лучами, проектирующими точку A на соответствующую плоскость. Отрезки Aa , Aa' и Aa'' этих перпендикуляров называются *проектирующими отрезками*.

Проектирующие отрезки находятся вне плоскостей проекций; однако нетрудно получить равные им отрезки непосредственно на плоскостях проекций.

На рис. 25, а получился прямоугольный параллелепипед $Aa'a''a_yaa_xO$. Параллельные рёбра параллелепипеда равны между собой:

$$Aa = a'a_x = a''a_y, \quad Aa' = aa_x = a''a_z, \quad Aa'' = aa_y = a'a_z.$$

*) Первая буква слова «horizontal».

**) Первая буква слова «vertical».

***) Эта буква выбрана по сходству с буквой V (W —два V , написанные подряд)

Таким образом (рис. 25, б), зная две проекции точки на любые две взаимно перпендикулярные плоскости, мы можем найти проекцию этой же точки на третью плоскость, даже не находя самой точки.

Например, по данным проекциям a и a'' легко найти a' ; зная a' и a'' , можно найти a и т. д.

§ 8. Вид сверху. Вид спереди. Вид сбоку

Горизонтальная проекция точки может быть найдена также и следующим способом. Поместим глаз наблюдателя на вертикальной прямой, проходящей через заданную точку A (рис. 26, а). Тогда вертикальный луч зрения, проведенный через точку A , встретит плоскость H в точке a , и наблюдателю будет казаться, что точки A и a совпадают.

Поэтому точку a называют:

вид сверху точки A или *план* точки A .

Если дано несколько точек, например A, B, C, D , то горизонтальную проекцию каждой из них можно получить, перемещая глаз наблюдателя так, чтобы он последовательно находился на вертикальных прямых, проходящих через

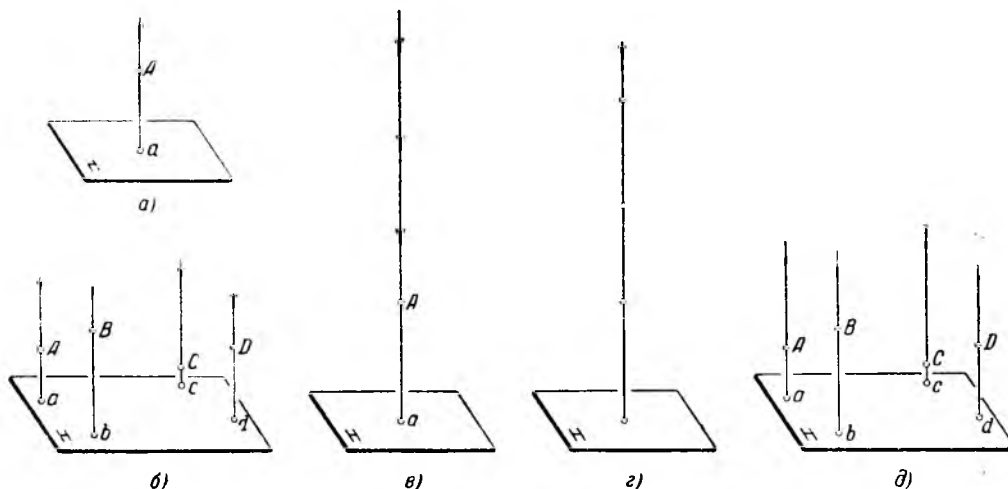


Рис. 28. Горизонтальная проекция—вид сверху.

эти точки (рис. 26, б). При этом важно заметить, что *расстояние глаза от проектируемой точки и от плоскости проекций не имеет никакого значения* (рис. 26, в). При удалении или приближении глаза горизонтальная проекция этой точки не изменит своего положения.

Если на вертикальном луче находится не одна, а несколько рассматриваемых точек (рис. 26, г), то их горизонтальные проекции совпадают. Таким образом, *все точки, находящиеся на одном перпендикуляре к плоскости проекций, имеют одну общую проекцию на эту плоскость*.

Можно получить вид сверху нескольких точек сразу, не перемещая глаза наблюдателя каждый раз на новую вертикаль. Это делается так.

Пусть глаз наблюдателя безгранично удаляется от плоскости проекций вверх, по перпендикуляру к этой плоскости. Тогда все лучи зрения будут всё более и более приближаться к параллельным. При достаточно большом удалении глаза от плоскости проекций мы практически не обнаружим отклонения лучей зрения от перпендикуляров к плоскости и получим сразу горизонтальные проекции всех рассматриваемых точек (рис. 26, д).

Например, когда лётчик, пролетая на достаточно большой высоте, смотрит вниз, то под ним—«вид сверху» (*план* или *горизонтальная проекция*) небольшого участка, над которым он пролетает.

По аналогии с видом сверху говорят: *вид спереди* — он часто называется *фасад* (рис. 27, а) — и *вид сбоку* (рис. 27, б). Что это такое — понятно без пояснений.

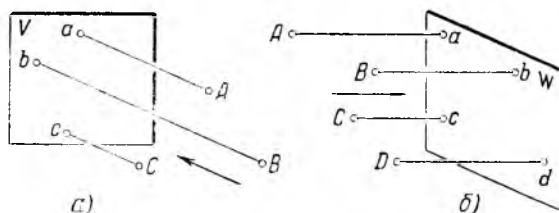


Рис. 27. а) Вид спереди, б) вид сбоку.

Заметим, что обычно плоскость H располагают под рассматриваемыми точками, плоскость V — позади этих точек, а плоскость W располагается справа от этих точек*).

§ 9. Изменение проекций точки при изменении её положения

На рис. 28 изображена точка A и две её проекции: a — на горизонтальную плоскость H и a' — на вертикальную плоскость V .

Передвинем точку A на некоторый отрезок вправо — в положение B . Очевидно, что на столько же переместятся и обе её проекции: они займут

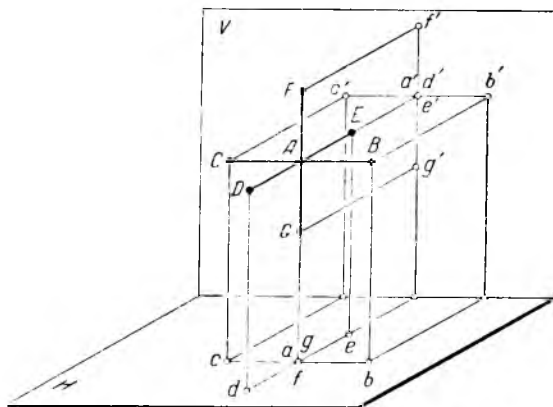


Рис. 28. Проекция движущейся точки.

положения b и b' . То же самое произойдёт, если мы передвинем точку A влево, в положение C : проекциями её будут c и c' .

Переместим точку A вперёд, в положение D . Одновременно с этим (и на столько же) переместится и её горизонтальная проекция (d); вертикальная же проекция (d') совпадёт с a' , т. е. останется на месте. То же самое произойдёт, если мы переместим точку A назад в положение E : проекциями её будут e и e' (совпадающая с a').

Переместим точку A вверх — в положение F . Одновременно с этим (и на столько же) переместится и её вертикальная проекция (f'); горизонтальная же проекция останется на месте. То же самое произойдёт, если мы опустим точку A вниз, в положение G : проекциями её будут точки g (совпадающая с a) и g' .

*) Иногда плоскость W располагают слева от рассматриваемых точек.

У п р а ж н е н и я. 1. Проследите за изменениями проекции точки A (рис. 28) на плоскость W .

2. Сделайте из картона или плотной бумаги модель трёх взаимно перпендикулярных плоскостей—они будут тремя плоскостями проекций. Пусть кончик карандаша играет роль точки K (рис. 29).

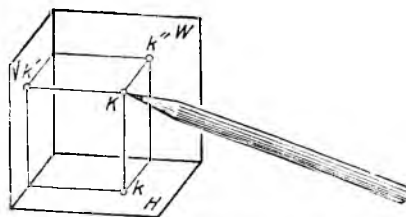


Рис. 29. Три проекции точки.

1) Пометьте на модели последовательно: k —горизонтальную проекцию, k' —вертикальную проекцию и k'' —вторую вертикальную проекцию точки K .

2) Убрав карандаш, укажите точку K в пространстве по двум её проекциям: k и k' , затем—по k и k'' и, наконец, по k' и k'' .

3) По двум проекциям точки найдите третью, не находя самой точки.

4) По любым двум проекциям точки K найдите её расстояния от всех трёх плоскостей проекций.

ГЛАВА II

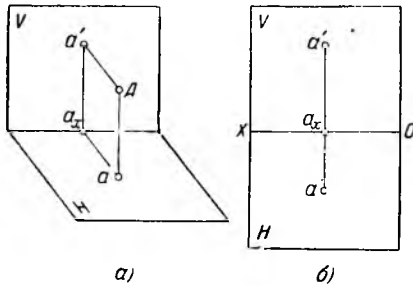
ЭШЮРЫ

§ 10. Эпюр двух проекций

В первой главе мы научились определять положение точки в пространстве посредством двух её проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости.

Решим ту же задачу, но на этот раз при помощи чертежа на одной плоскости.

Возьмём лист бумаги и, согнув его под прямым углом, поставим, как показано на рис. 30, а, т. е. так, чтобы одна половина листа была горизонтальной, другая—вертикальной. Зафиксируем на каждой половине листа положение в пространстве точки A (например, кончика карандаша, как в упражнении 2 на предыдущей странице), спроектировав её на обе плоскости проекций; проекции точки обозначим через a и a' .



[Рис. 30. Эпюр двух проекций.]

Развернём теперь лист бумаги, т. е. совместим обе его половины в одну плоскость (рис. 30, б). Полученный таким способом чертёж носит особое название—*эпюр**) *двух проекций*. Прямая OX (которая до развёртывания листа была линией пересечения плоскостей проекций) называется *осью проекций*.

Эпюр вполне определяет положение точки A в пространстве относительно плоскостей проекций. В самом деле, если на плоском чертеже даны две проекции точки, то для нахождения положения этой точки в пространстве достаточно снова согнуть чертёж по оси OX так, чтобы плоскости проекций образовали прямой угол; восстановив из точек a и a' перпендикуляры, найдём точку их пересечения—точку A .

Поэтому, если нам будут даны на эпюре две проекции точки на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций (например, точки a и a'), мы будем говорить кратко «*дана точка A*», хотя самой точки на чертеже вовсе и не будет, ибо по данным двум проекциям точки мы легко найдём саму точку.

Как мы видели (см. рис. 22, з), два перпендикуляра aa_x и $a'a_x$, опущенные из проекций a и a' точки A на ось, встречаются в одной точке a_x на этой оси; поэтому на развёрнутом чертеже эти перпендикуляры составляют продолжение один другого.

Итак, *две проекции любой точки лежат на одном перпендикуляре к оси проекций*.

*) От французского слова «épure» —чертёж, проект

§ 11. Эпюр трёх проекций

Для получения третьей проекции a'' точки A введём профильную плоскость W (рис. 31, а), приклеив пол-листа бумаги к листу, согнутому ранее под прямым углом. После нанесения на этой плоскости третьей проекции a'' точки A , развернём все три плоскости в одну.

На этот раз сделать это не так просто, и нам придётся предварительно разрезать модель по одной из трёх прямых OX , OY или OZ , по которым пересекаются плоскости проекций. Сделаем этот разрез, например по оси OY и развернём нашу модель. Мы получим чертёж—*эпюр трёх проекций* (рис. 31, б).

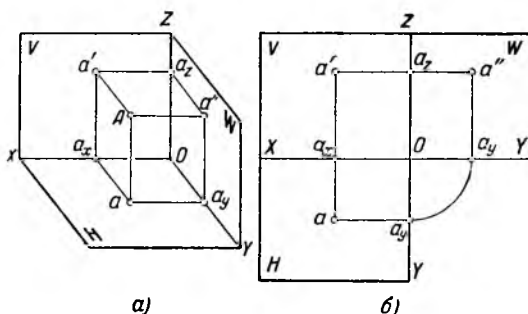


Рис. 31. Эпюр трёх проекций.

Обратим внимание на обозначение прямых, по которым пересекаются плоскости проекций; эти три прямые—*оси проекций*—обозначаются так:

прямая, по которой пересекаются плоскости	H и V ,	—ось OX ,
» » » » » »	H и W ,	—ось OY ,
» » » » » »	V и W ,	—ось OZ .

В правой нижней четверти рис. 31, б изображена дуга окружности $a_y a_y$. Что она обозначает?

Модель трёхгранного угла, изображённую на рис. 31, а, мы разрезали по оси OY —линии пересечения плоскостей H и W ; поэтому точка a_y , которая находилась как раз на этой оси, останется при разворачивании модели одновременно и на плоскости H , и на плоскости W ; конечно, её расстояние от точки O при этом несколько не изменилось; это дало нам право на рис. 31, б описать из точки O как из центра четверть окружности, соединяющую точку a_y , оставшуюся на плоскости H , с этой же точкой на плоскости W .

Точку, в которой встречаются все три плоскости проекций, а следовательно, и все три оси проекций, обозначают буквой O .

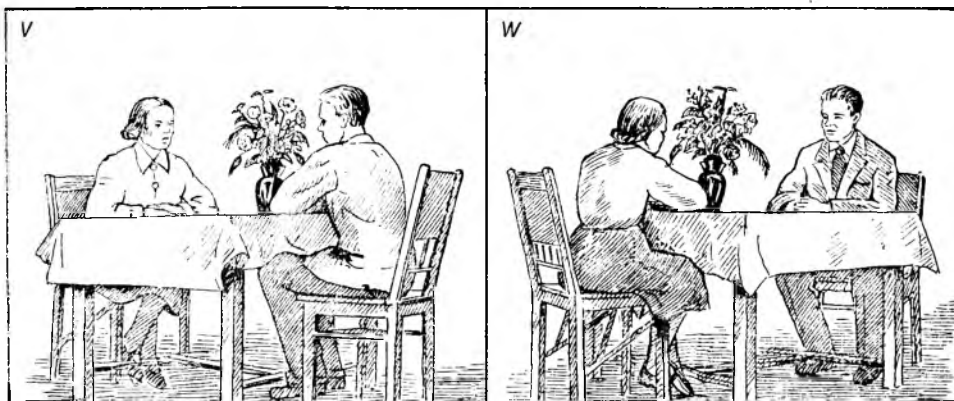


Рис. 32. Не мешают ли им цветы видеть друг друга?

У п р а ж н е н и е. Посмотрите на рис. 32. Не мешают ли им цветы видеть друг друга?
У к а з а н и е. Чтобы ответить на этот вопрос, постройте проекцию вазы и стульев на горизонтальную плоскость.

§ 12. Ортогональные проекции (метод Монжа)

Хотя слово «ортогональный» есть просто перевод слова «прямоугольный» (см. Введение, стр. 15), однако *ортогональными проекциями* принято называть не всякие прямоугольные проекции, а только такие, которые получаются в результате прямоугольного проектирования на две (или на три) взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

Таким образом, употребляя термин «ортогональные проекции», мы всегда будем иметь в виду не отдельную проекцию на одну плоскость, а *систему двух (или трёх) проекций*, как показано, например, на рис. 30 или 31.

Способы построения прямоугольных проекций на две (или на три) взаимно перпендикулярные плоскости и решения различных задач, касающихся изображённых тел,—называются также *методом Монжа*, по имени французского учёного Гаспара Монжа (1746—1818), издавшего в 1799 г. труд, в котором он привёл в стройную систему приёмы построения изображений и решения задач.

§ 13. Опыт с дверью

Сделаем следующий опыт. Откроем дверь так, чтобы она стала перпендикулярно к плоскости стены (рис. 33, а). Тогда можно считать, что пол—это плоскость H , стена—плоскость V , дверь—плоскость W .

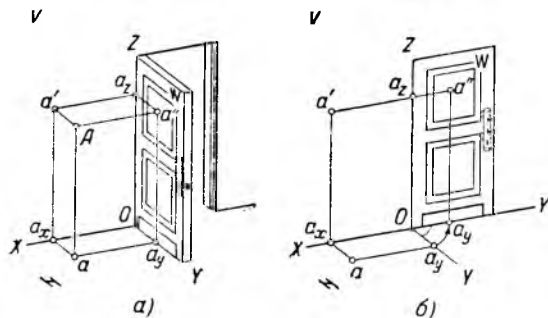


Рис. 33. Дверь—плоскость W .

Возьмём произвольную точку A и найдём её проекции a , a' и a'' на полу, на стене и на двери. Станем вращать профильную плоскость проекций (дверь) W вокруг вертикальной оси OZ до совмещения с вертикальной плоскостью V или, говоря проще, закроем дверь (рис. 33, б). Проекция a и a' остались на месте; точки a'' и a_y вместе со всеми точками двери прошли пути, равные

четвертям окружностей, центры которых расположены на оси вращения двери (OZ), а радиусы равны расстоянию каждой из точек до этой оси. Расстояние от точки a'' до оси OZ равно a_yO и равно также Aa' (расстоянию от точки A до плоскости V).

Вообразите теперь, что дверь плохо навешена или петли её ослабли, так что при открывании и закрывании этой двери она царапает пол. Тогда след на полу от вращения плоскости, который оставляет точка a_y (и всякая другая точка на двери, касающаяся пола), и есть та четверть окружности, которая изображена на рис. 31, б.

§ 14. Некоторые частные положения точки

Рассмотрим эпюру трёх проекций.

Точка A (рис. 34, а) лежит в вертикальной плоскости проекций; в этом случае вертикальная проекция a' точки A совпадает с самой точкой, а её горизонтальная проекция a лежит на оси OX ; профильная проекция a'' лежит на оси OZ .

Точка B (рис. 34, б) лежит в горизонтальной плоскости проекций; в этом случае горизонтальная проекция b точки B совпадает с самой точкой, а вертикальная проекция b' лежит на оси OX ; вторая вертикальная проекция b'' лежит на оси OY .

Точка C (рис. 34, в) лежит на оси OX ; её горизонтальная и вертикальная проекции (c и c') совпадают с ней; вторая вертикальная проекция c'' совпадает с точкой O .

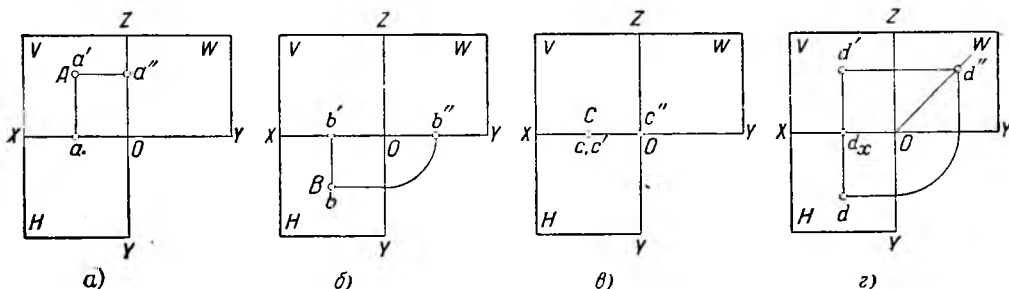


Рис. 34. Частные положения точки. а) Точка A лежит в плоскости V . б) Точка B лежит в плоскости H . в) Точка C лежит на оси проекций. г) Точка D находится на одинаковых расстояниях от плоскостей проекций H и V .

Читатель легко разберёт (по аналогии с точками A , B и C), какие особенности имеют изображения на эпюре точек, лежащих в плоскости W , на оси OY , на оси OZ .

Точка D (рис. 34, г) лежит на равных расстояниях от плоскостей H и V ; $dd_x = d'd_x$. Профильная проекция d'' лежит на биссектрисе угла ZOY .

§ 15. Проекция линии

Если точка начнёт перемещаться в пространстве, то одновременно будут перемещаться и её проекции. Но при движении всякой точки образуется линия; линия, образованная движением точки a (горизонтальной проекции точки

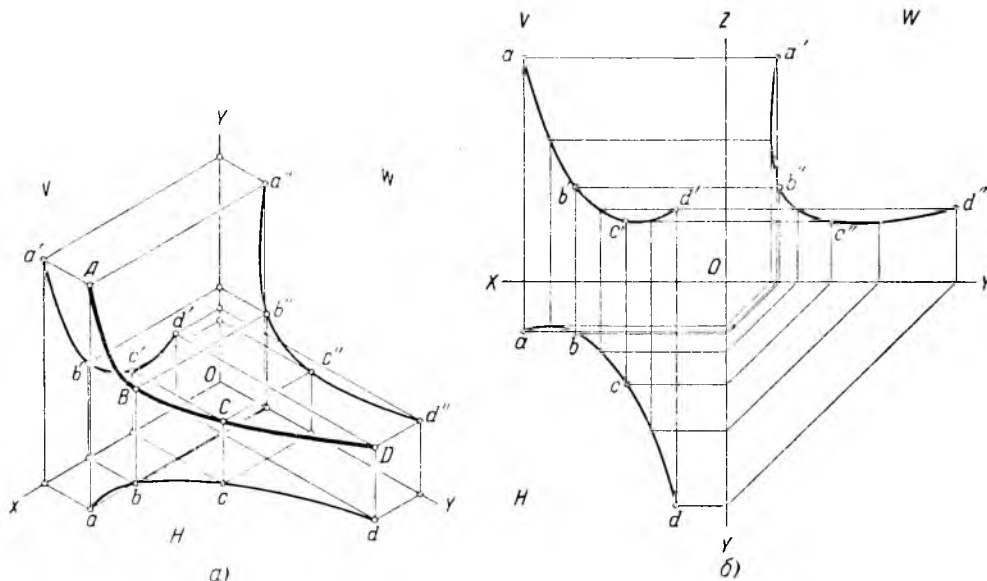


Рис. 35. Проекция линии.

A), есть горизонтальная проекция (план или вид сверху) линии, образовавшейся при движении точки A . Кривая abc на рис. 35, а представляет горизонтальную проекцию кривой $ABCD$.

Аналогично кривая $a'b'c'd'$ есть вертикальная проекция, а кривая $a''b''c''d''$ — профильная проекция кривой $ABCD$. На рис. 35, б изображён соответствующий эпюр.

§ 16. Четыре четверти пространства

До сих пор мы ограничивались только теми точками пространства, которые находятся в *выше пола* (т. е. горизонтальной плоскости проекций) и *перед стеной* (т. е. вертикальной плоскостью проекций). К таким точкам относится, например, точка A (рис. 36).

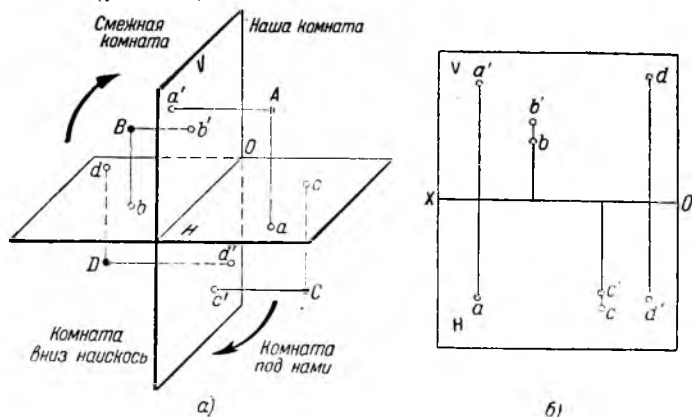


Рис. 36. Точки в различных четвертях пространства.

Рассмотрим случай, когда изучаемая точка B находится в другой комнате, а именно в смежной комнате, по другую сторону стены *).

В этом случае вертикальная проекция b' точки B оказывается на той же стене, горизонтальная же проекция этой точки—точка b —оказывается на полу смежной комнаты, т. е. по другую сторону плоскости V .

Горизонтальная плоскость проекций оказалась разбитой на две полуплоскости: *переднюю* и *заднюю*.

Поэтому, когда мы для получения эпюра точек A и B станем вращать горизонтальную плоскость проекций H вокруг оси OX до совмещения её с пло-

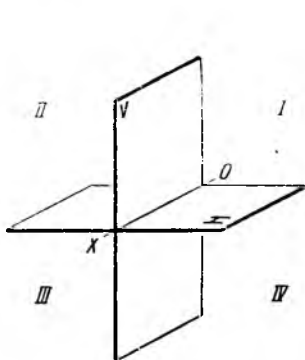


Рис. 37. Четверти пространства.

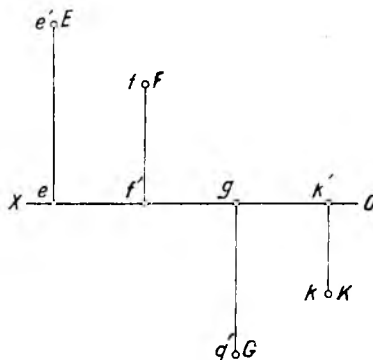


Рис. 38. Эпюры точек, лежащих в плоскостях проекций.

скостью V , то передняя полуплоскость H опустится вниз, а задняя полуплоскость H (на которую спроектировалась точка B), наоборот, пойдёт вверх и окажется на эпюре *выше* оси OX . Точка a находится *ниже* оси OX , а точка b —*выше* оси OX .

Найдём теперь проекции точки C , находящейся в комнате, расположенной *под* нашей комнатой. Горизонтальная проекция c точки C оказывается на той же передней полуплоскости H , что и горизонтальная проекция точки A . Вер-

*) Для простоты рассуждения мы будем считать толщину стены равной нулю.

тикальная же проекция c' точки C оказывается на нижней полуплоскости V . Поэтому при совмещении (с целью получения эюра) плоскостей H и V —обе проекции точки C окажутся ниже оси OX .

Наконец, найдём проекции точки D , находящейся под плоскостью H и за плоскостью V . Горизонтальная проекция d оказывается на задней полуплоскости H , а вертикальная проекция d' —на нижней полуплоскости V . Поэтому на эюре точка d располагается выше оси OX , а точка d' —ниже оси OX .

Таким образом, плоскости проекций H и V :

1) делятся каждая на две полуплоскости (или «полюсы»);

2) делят пространство на четыре четверти*), которые называются: первая, вторая, третья и четвёртая четверть (рис. 37).

Эюры точек, находящихся на самих плоскостях проекций, изображены на рис. 38. Точка E находится на верхней поле плоскости V , точка F —на задней поле плоскости H , точка G —на нижней поле плоскости V и, наконец, точка K на передней поле плоскости H .

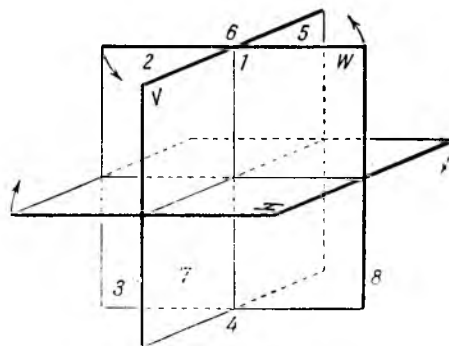


Рис. 39. Октанты.

§ 17. Восемь октантов пространства

Если рассматривать не две плоскости проекций, а все три, то пространство оказывается разделённым на восемь частей: это—так называемые *октанты**)*. Нумерация октантов дана на рис. 39.

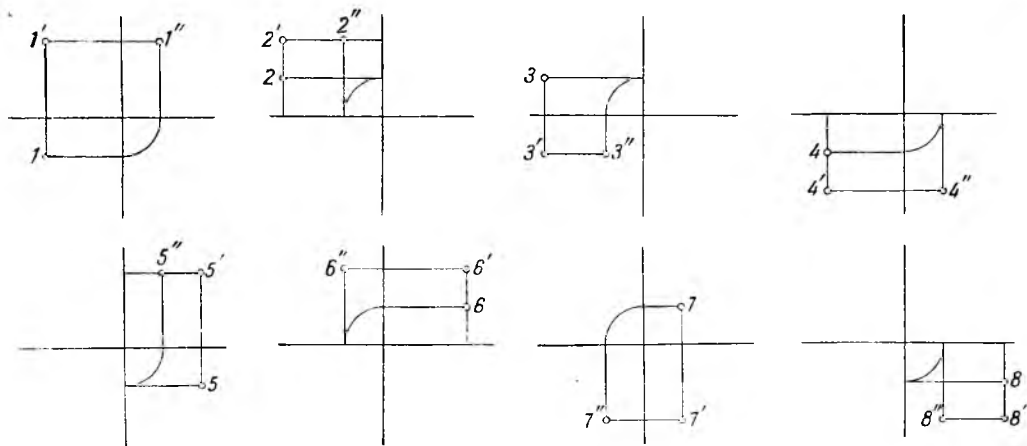


Рис. 40. Эюры точек, находящихся в различных окантах.

На рис. 40 даны проекции восьми точек; номер точки соответствует номеру октанта, в котором она находится.

*) Иногда вместо «четверть пространства» говорят «квадрант» от латинского слова «quadrans»—четвёртая часть.

**) От греческого и латинского слова «okto»—восемь.

ГЛАВА III ПРЯМАЯ

§ 18. Проекция прямой

Начнём с рассмотрения отрезка прямой линии. Пусть AB (рис. 41)—отрезок прямой. Для того чтобы зафиксировать положение в пространстве отрезка AB (а следовательно, и прямой AB), достаточно зафиксировать положение его концов (точек A и B), а это мы уже умеем делать.

Напомним, что проекция прямой—прямая (§ 3). Легко доказать, что проекция отрезка—отрезок.

Любая точка C отрезка AB проецируется на плоскости H и V в точки c и c' , лежащие на отрезках ab и $a'b'$.

Плоскости $ABba$ и $ABb'a'$, проектирующие прямую AB на плоскости проекций, называются *проектирующими плоскостями*; первая — *горизонтально-проектирующая*, а вторая—*вертикально-проектирующая*.

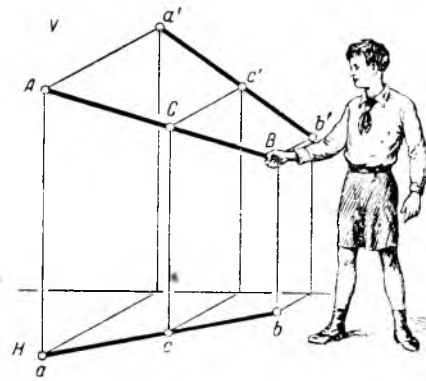


Рис. 41. Проекция отрезка.

Важно не путать: горизонтально-проектирующей называется та, которая проектирует на горизонтальную плоскость; таким образом, горизонтально-проектирующая плоскость сама занимает вертикальное положение.

От рисунка легко перейти к плоскому чертежу—эпюру. Рис. 42 представляет эпюр отрезка AB ; его горизонтальная проекция (ab) и вертикальная

проекция ($a'b'$) показаны на рис. 41, а его профильная проекция построена по способу, изложенному на стр. 23 (рис. 31, б). Для получения профильной проекции можно, вместо того чтобы чертить четверти окружности из центра O (рис. 42, а), провести прямые линии под углом 45° к двум осям OY так, как это сделано на рис. 42, б, или же продолжить горизонтальные линии за ось OY до биссектрисы угла и потом «повернуть на 90° », как это сделано на рис. 42, в.

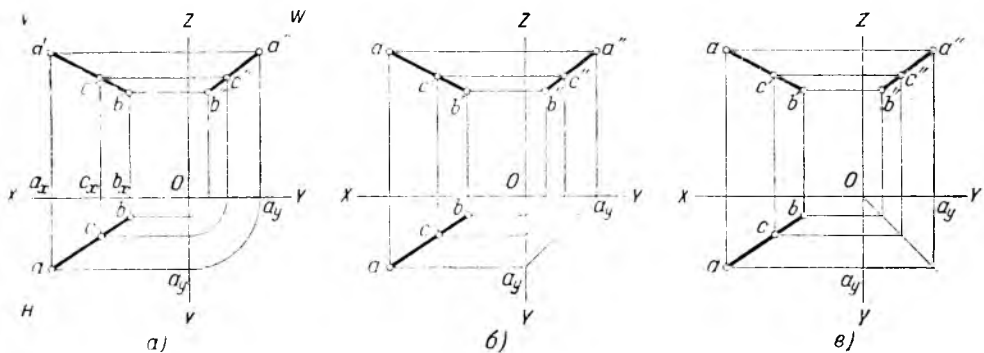


Рис. 42. Эпюр отрезка.

проекция $a'b'$ показаны на рис. 41, а его профильная проекция построена по способу, изложенному на стр. 23 (рис. 31, б). Для получения профильной проекции можно, вместо того чтобы чертить четверти окружности из центра O (рис. 42, а), провести прямые линии под углом 45° к двум осям OY так, как это сделано на рис. 42, б, или же продолжить горизонтальные линии за ось OY до биссектрисы угла и потом «повернуть на 90° », как это сделано на рис. 42, в.

§ 19. Некоторые частные положения прямой

Рассмотрим ряд частных положений, которые может занимать прямая линия по отношению к плоскостям и осям проекций.

Говоря о прямой линии, мы будем изображать на чертеже лишь отрезок прямой (рис. 43).

Читателю необходимо приготовить модель трёх плоскостей проекций (см. рис. 29 на стр. 21), внимательно рассмотреть каждый чертёж на рис. 43, представить себе положение отрезка в пространстве по его эюру и, вооружившись карандашом, представляющим отрезок, поставить карандаш именно так, как требует эюру.

1) *Общее («случайное») положение прямой AB* изображено на рис. 43, а; другое общее положение прямой было изображено на рис. 42.

2) *Прямая вертикальна* (прямая CD на рис. 43, б), т. е. перпендикулярна к горизонтальной плоскости; в этом случае все её точки проектируются на горизонтальную плоскость в одну точку. Пролетая как раз над заводской дымовой трубой, лётчик видит её в виде точки.

3) *Прямая перпендикулярна к плоскости V* (прямая EF на рис. 43, в); в этом случае все её точки проектируются на вертикальную плоскость в одну точку.

4) *Прямая лежит в плоскости H* (прямая GH на рис. 43, г); в этом случае горизонтальная проекция прямой совпадает с самой прямой, а её вертикальная проекция находится на оси OX .

5) *Прямая лежит в плоскости V* (прямая IJ на рис. 43, д). Здесь, наоборот, вертикальная проекция прямой совпадает с самой прямой, а её горизонтальная проекция находится на оси OX .

6) *Прямая лежит на самой оси OX* (прямая KL на рис. 43, е); в этом случае обе проекции прямой совпадают с самой прямой.

7) *Прямая параллельна плоскости H* (прямая MN на рис. 43, ж); в этом случае вертикальная проекция прямой параллельна оси OX , а горизонтальная располагается произвольно.

8) *Прямая параллельна плоскости V* (прямая QR на рис. 43, з); в этом случае, наоборот, горизонтальная проекция прямой параллельна оси OX , а вертикальная располагается произвольно.

9) *Прямая параллельна оси OX* (прямая RS на рис. 43, и); в этом случае обе её проекции параллельны оси OX .

10) *Прямая параллельна профильной плоскости*. Некоторые частные случаи этого положения мы уже рассмотрели (прямые CD и EF). Общее положение такой прямой (она называется *профильной прямой*) изображено на рис. 43, к, а также—на рис. 43, л. На первом из них прямая UT идёт сзади, снизу вверх, вперёд; на втором прямая VW идёт сзади, сверху вниз, вперёд.

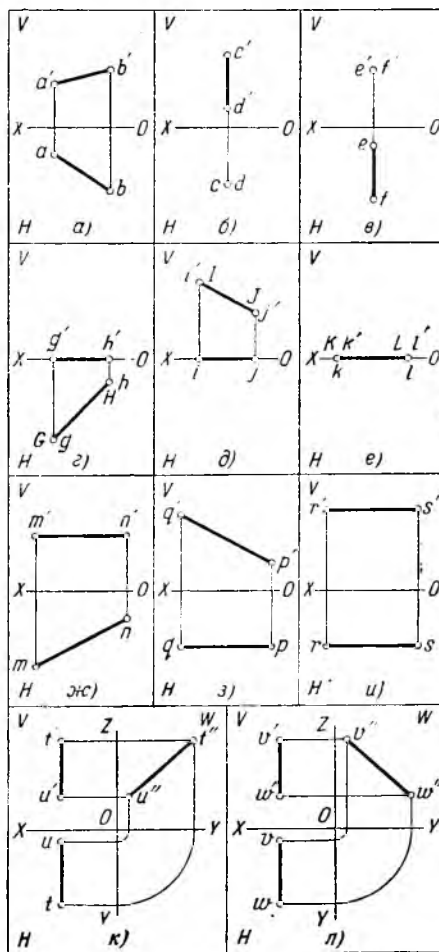


Рис. 43. Частные случаи положения прямой.

Для более наглядного представления таких прямых необходимо начертить третью проекцию каждой из них.

У п р а ж н е н и я. 1. Постройте на эюре третьей проекции отрезков AB , CD , EF , GH , IJ , KL , MN , QP и RS (рис. 43).

2. Начертите эюру профильной прямой, пересекающей ось OX .

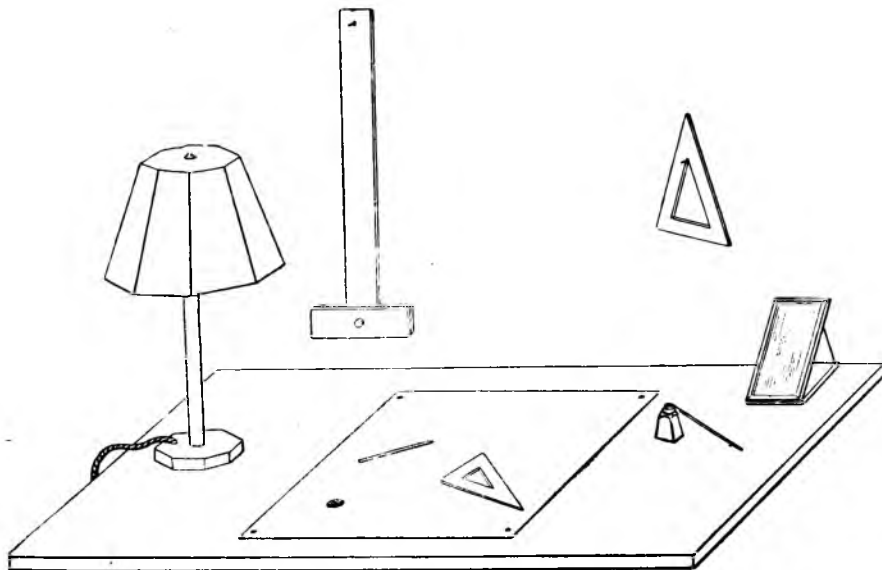


Рис. 44. Какое положение относительно доски и стены занимают изображённые здесь прямые?

3. На рис. 44 изображена чертёжная доска с лампой и т. д. Пусть доска — плоскость H , а стена — плоскость V ; найдите все случаи положения прямой, рассмотренные в этом параграфе на рис. 43.

§ 20. Длина отрезка и длина его проекций

Мы знаем, как зафиксировать на эюре положение отрезка прямой и обратно, как по данным проекциям найти положение отрезка. Но какова длина отрезка, заданного проекциями? Что больше — отрезок, или его проекция? При каких условиях они равны между собой?

Прежде чем ответить на эти вопросы, рассмотрим один пример.

На берегу пруда сидит рыболов (рис. 45, а). Прикреплённый к лесе груз тянет её вниз, и лесе висит отвесно. Если больше наклонить удочку (рис. 45, б), то её конец, а с ним и груз, и крючок уйдут дальше от рыболова; при этом лесе продолжает оставаться отвесной. Расстояние от руки рыболова до леси (т. е. горизонтальная проекция удилища) увеличится, оставаясь, однако, менее длины удилища. Если держать удочку совершенно горизонтально (рис. 45, в), то удаление леси от руки рыболова будет наибольшим; в этом случае горизонтальная проекция удилища будет в точности равна длине удилища. Для того чтобы снять с крючка пойманную рыбу и насадить новую наживку, рыболов ставит удилище вертикально (рис. 45, г); тогда крючок подходит к руке, т. е. расстояние от руки до леси (проекция удилища) равно нулю.

Итак, величина проекции удилища на горизонтальную плоскость зависит от угла её наклона; при вертикальном положении удилища проекция равна нулю, при горизонтальном — равна длине удилища, во всех промежуточных положениях она меньше длины удилища.

Вообще, отвлекаясь от нашего рыболова, можно сформулировать следующее геометрическое положение:

Если проектируемый отрезок параллелен плоскости проекций, то проекция равна самому отрезку.

Если отрезок перпендикулярен к плоскости проекций, то его проекция на эту плоскость превращается в точку, т. е. её длина равна нулю.

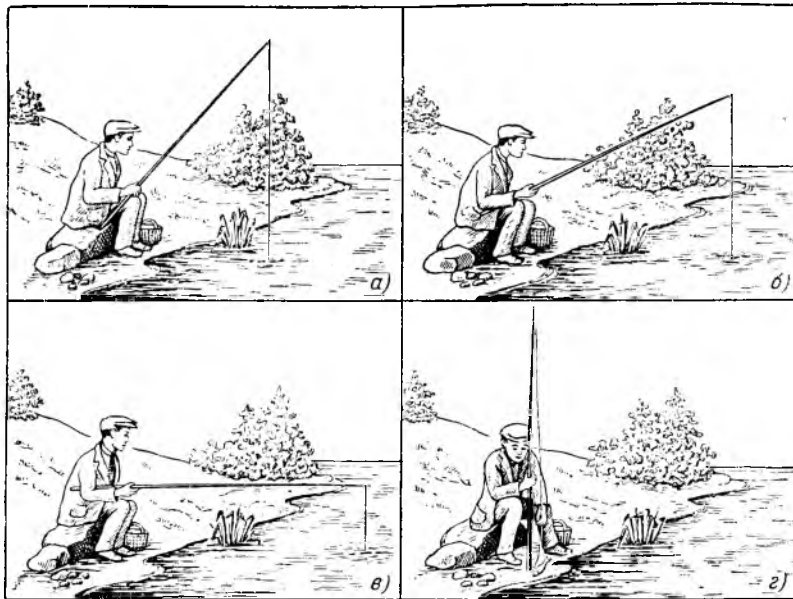


Рис. 45. Что больше—отрезок или его прямоугольная проекция?

Промежуточные положения отрезка относительно плоскости проекций, т. е. случаи, когда отрезок образует с плоскостью проекций острый угол, дают промежуточные значения величины проекции отрезка—между нулём и длиной самого отрезка.

Итак, в о о б щ е г о в о р я, проекция отрезка не равна самому отрезку (за исключением лишь того случая, когда отрезок параллелен плоскости проекций), т. е. величина отрезка при проектировании искажается; говорят, что *отрезок проектируется с искажением*. Проекция никогда не может быть больше проектируемого отрезка*).

Отношение длины проекции отрезка к длине проектируемого отрезка называется показателем искажения. При прямоугольном проектировании показатель искажения не может быть больше единицы.

У п р а ж н е н и е. Даны три проекции треугольника ABC —три равных прямоугольных треугольника (черт. 46); не производя никаких построений, доказать, что треугольник ABC —равносторонний.

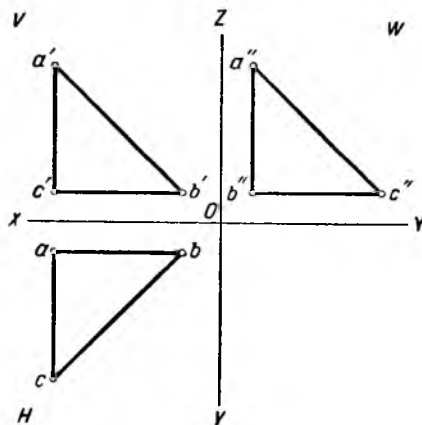


Рис. 46. Докажите, что треугольник ABC —равносторонний.

*) Напоминаем, что мы в этой части книги всё время имеем в виду прямоугольные проекции. При других способах проектирования (например, при параллельном косоугольном проектировании) проекция отрезка может быть и больше проектируемого отрезка. См. об этом во второй части книги, на стр. 174 и 188.

§ 21. Истинная величина отрезка

Поставим прямоугольный треугольник ABC в такое положение, чтобы его катет BC был направлен по вертикали (рис. 47); тогда катет AC будет горизонтальным. Рассмотрим проекцию гипотенузы AB на горизонтальную плоскость

Следующие равенства вполне понятны:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \quad AC = ab, \quad BC = Bb - Aa.$$

Следовательно, $AB^2 = ab^2 + (Bb - Aa)^2$.

Отсюда вытекает следующее правило для определения истинной величины отрезка по его проекциям: истинная величина отрезка равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен горизонтальной проекции, а другой катет равен разности расстояний концов отрезка от горизонтальной плоскости проекций.

Упомянутая разность расстояний концов отрезка от горизонтальной плоскости часто называется *превышением*.

Очевидно, можно сформулировать это правило иначе, поменяв ролями горизонтальную и вертикальную плоскости. Тогда за катеты надо принять в е р т и к а л ь н у ю проекцию отрезка и разность расстояний его концов от в е р т и к а л ь н о й плоскости проекций.

На этом свойстве основан следующий приём получения истинной величины отрезка по его эпюру.

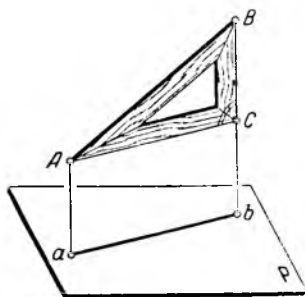


Рис. 47. Длина отрезка и его проекции.

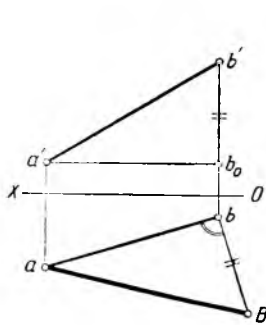


Рис. 48. Нахождение истинной величины отрезка AB .

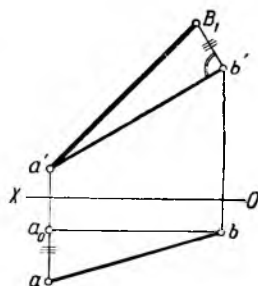


Рис. 49.

На рис. 48, (а также на рис. 49), отрезок AB дан двумя проекциями ab и $a'b'$. Для нахождения его истинной величины строим прямоугольный треугольник. На рис. 48 мы в качестве одного катета используем ab , а за другой принимаем превышение b_0b' (предварительно проводим $a'b_0$ параллельно оси проекций); перенеся это превышение при помощи циркуля на прямую, перпендикулярную к ab , получаем прямоугольный треугольник abB_1 , гипотенуза которого aB_1 и даёт истинную величину отрезка AB .

На рис. 49 показано другое построение истинной величины отрезка; в этом построении горизонтальная и вертикальная проекции меняются ролями.

Таким образом, общее правило нахождения истинной величины отрезка по его эпюру таково:

Истинная величина отрезка, данного двумя проекциями, равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого равен одной из проекций отрезка, а другой катет равен разности расстояний концов другой проекции от оси проекций.

Позже (в §§ 59 и других) мы укажем и другие способы определения истинной величины отрезка.

У п р а ж н е н и я. 1. Найдите истинные величины трёх отрезков, заданных на рис. 50 двумя проекциями.

2. Дана вертикальная проекция правильного тетраэдра (треугольной пирамиды, у которой все 6 рёбер равны) и горизонтальная проекция одного из рёбер (рис. 51); требуется до-

строить горизонтальную проекцию этого тетраэдра. При решении этой задачи возможны различные пути; испробуйте три из них и убедитесь, что результат получится один и тот же.

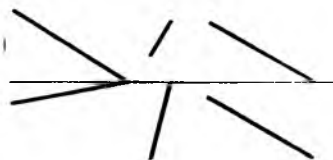


Рис. 50. Найдите истинные величины трёх данных отрезков.

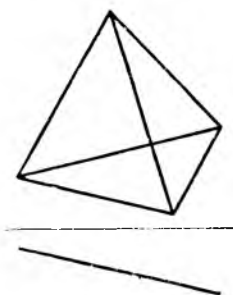


Рис. 51. Постройте горизонтальную проекцию правильного тетраэдра.

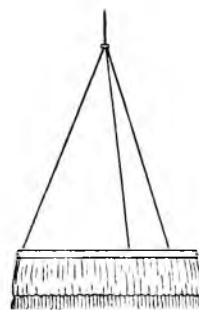


Рис. 52. Найдите истинную длину шнура.

3. Круглый обруч абажура подвешен на трёх равных шнурах; по данной вертикальной проекции (рис. 52) найдите истинную длину шнура. Необходимо ли для решения этой задачи располагать вертикальными проекциями всех трёх шнуров или же достаточно двух, а может быть даже и одного?

В некоторых определённых случаях отрезок проектируется на одну или на обе плоскости проекций без искажения, а именно:

Если отрезок параллелен одной из плоскостей проекций, то он проектируется на эту плоскость без искажения. На эмпоре этот случай распознаётся очень просто; другая проекция такого отрезка параллельна оси проекций. На рис. 53 отрезок AB параллелен горизонтальной плоскости проекций, а отрезок CD параллелен вертикальной плоскости проекций. Если отрезок EF параллелен одновременно двум плоскостям проекций (т. е. параллелен оси проекций), то он проектируется на обе плоскости без искажения; при этом обе проекции параллельны оси проекций OX .

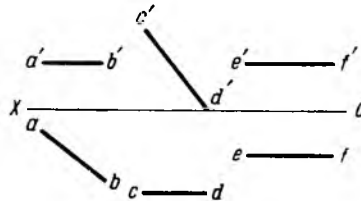


Рис. 53. Случай, когда отрезок проектируется без искажения.

§ 22. Следы прямой

Пуля влетела в комнату; она пробила стекло и ушла в потолок (рис. 54).



Рис. 54. Откуда стреляли?

Принимая, что пуля летела по прямой*), надо выяснить по следам пули на окне и на потолке, где находился стрелок.

*) На самом деле пуля летит по кривой линии—параболе, но на первой сотне метров после вылета из винтовки кривая полёта пули очень близка к прямой.

Ясно, что для этого надо соединить прямой два упомянутых следа и продолжить эту прямую наружу за окно. Только на этом продолжении мог находиться стрелок.

В начертательной геометрии *следами прямой линии* называют точки её пересечения с плоскостями проекций. Таким образом, в общем случае прямая имеет два или три следа (в зависимости от того, рассматриваем ли мы профильную плоскость или нет). Они называются *горизонтальным*, *вертикальным* и *профильным следами*.

Решим задачу: *найти следы прямой, заданной на эюре отрезком AB* (рис. 55 а).

Для этого продолжим данный отрезок в обе стороны до встречи с плоскостями проекций. Как же найти эти точки встречи?

Горизонтальный след нашей прямой, как и всякая точка, лежащая в горизонтальной плоскости, имеет вертикальную проекцию на оси проекций. С другой стороны эта вертикальная проекция должна лежать на вертикальной проекции данной прямой (так как след есть одна из точек прямой); отсюда вытекает следующее построение.

Продолжим вертикальную проекцию отрезка до пересечения с осью проекций (рис. 55, б); точку пересечения назовём c' . Из этой точки восстановим перпендикуляр к оси проекций до пересечения с горизонтальной проекцией прямой в точке c (она же C). Точка c (C) есть искомый горизонтальный след и в то же время горизонтальная проекция

этого следа, а точка c' — вертикальная проекция горизонтального следа. Вертикальный след D этой прямой находится аналогично.

Способ нахождения следов прямой и соответствующий рисунок 55, б рекомендуется очень прочно запомнить.

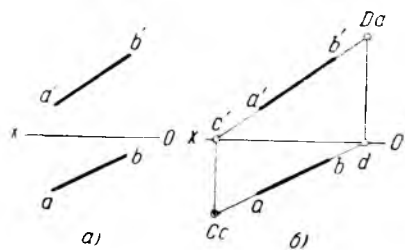


Рис. 55. Нахождение следов прямой.

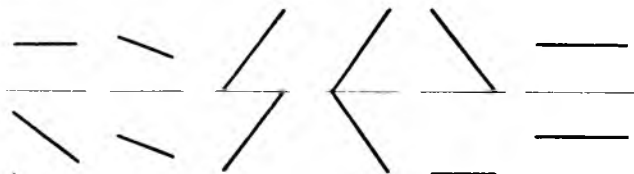


Рис. 56. Найдите следы этих шести прямых.

У п р а ж н е н и е. Найдите следы шести прямых, заданных проекциями (рис. 56). В каких случаях прямая имеет всего один след? В каком случае прямая не имеет ни одного следа?

§ 23. Взаимное положение двух прямых

В телефонной трубке слышен треск: где-то на линии произошло замыкание проводов, но где именно?

Выйдя из дому и взглянув вверх, я вижу (рис. 57, а), что провода как будто соединены друг с другом в некоторой точке (в точке A на чертеже). Но, может быть, провода и не соединены, а это мне только кажется?

Для ответа на интересующий нас вопрос мне следовало бы стать под провода и посмотреть прямо вверх; однако нет необходимости ходить так далеко — достаточно сделать два-три шага в сторону, не спуская при этом глаз с «точки A ». Оказалось, что при моём передвижении точка пересечения также начала двигаться и заняла новое положение B (рис. 57, б). Ясно, что если бы провода действительно соединялись в точке A , то эта точка не стала бы перемещаться, а оставалась бы на месте. Отсюда мы делаем вывод, что провода в пролёте между домом и столбом не соединяются.

Изложенные соображения мы применим к решению следующего вопроса начертательной геометрии.

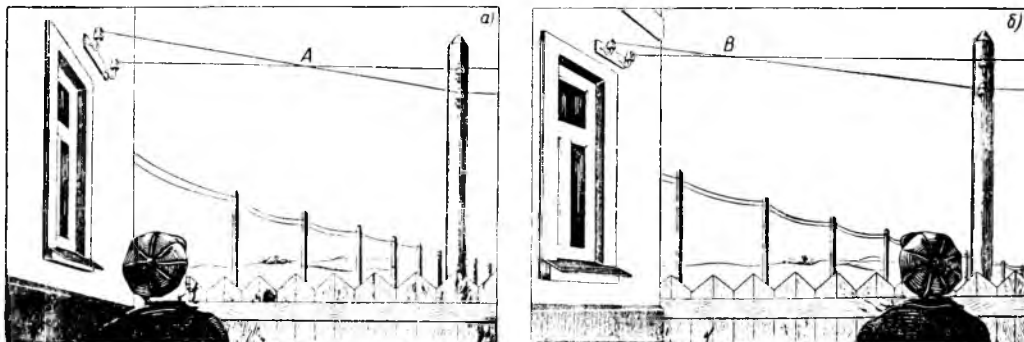


Рис. 57. Пересекаются ли провода?

Известно, что две прямые в пространстве могут: 1) пересекаться, 2) скрещиваться, 3) быть параллельными друг другу. Как расположены в пространстве две прямые, заданные на эпюре своими проекциями?

§ 24. Определение взаимного положения двух прямых по эпюру

Пересекаются ли прямые AB и CD , изображённые на эпюре (рис. 58)?

Рассматривая сначала горизонтальные проекции ab и cd прямых AB и CD , можно утверждать, что если эти прямые вообще пересекаются, то точкой их встречи может быть лишь точка, горизонтальной проекцией которой служит точка пересечения ab и cd (точка k). С другой стороны, перейдя от рассмотрения «вида сверху» к рассмотрению «вида спереди», т. е. рассматривая

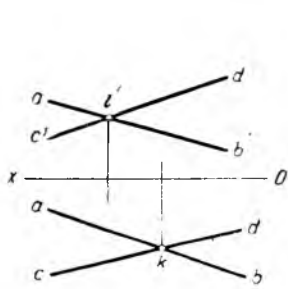


Рис. 58. Скрещивающиеся прямые.

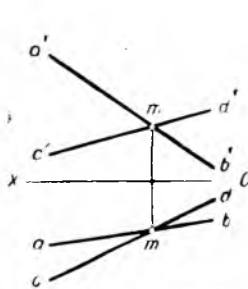


Рис. 59. Пересекающиеся прямые.

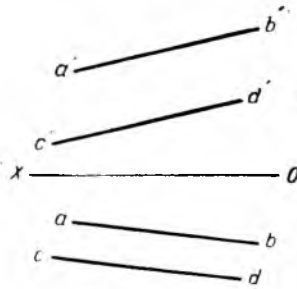


Рис. 60. Параллельные прямые.

вертикальные проекции $a'b'$ и $c'd'$ этих прямых, мы приходим к аналогичному заключению: точка пересечения наших прямых (если она существует) должна иметь своей вертикальной проекцией точку l' (пересечение вертикальных проекций этих прямых).

Но точки k и l' не лежат на одном перпендикуляре к оси проекций. Основное требование для проекций точки не выполнено. Следовательно, не существует точки с такими проекциями.

Значит, данные прямые не пересекаются. Но они не могут быть и параллельными. Мы знаем (см. Введение, рис. 18 на стр. 15), что параллельные прямые имеют и параллельные проекции. Остаётся единственное заключение: данные прямые AB и CD скрещиваются.

Очевидно, две прямые пересекаются, если точка пересечения их горизонтальных проекций и точка пересечения их вертикальных проекций лежат на одном перпендикуляре к оси проекций.

На рис. 59 прямые AB и CD пересекаются в точке M .

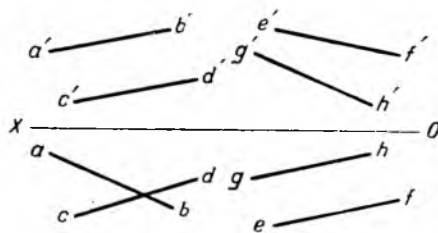


Рис. 61. Эти прямые—не параллельны.

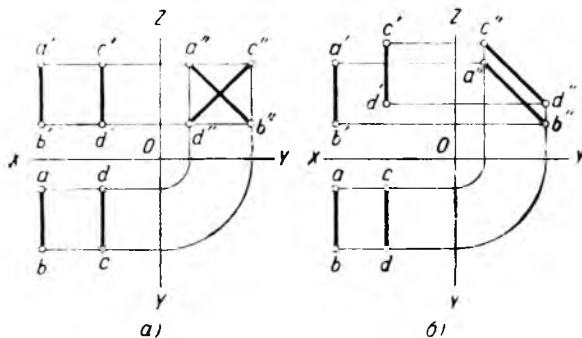


Рис. 62. Как распознать параллельность профильных прямых.

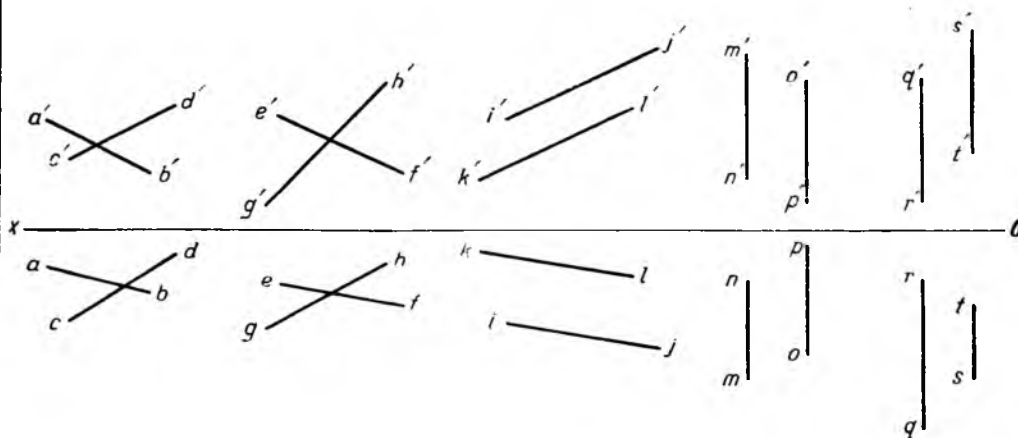
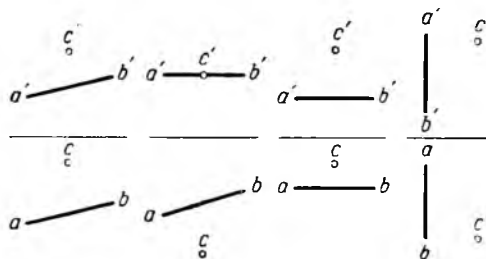


Рис. 63. Определите взаимное расположение данных пар прямых.

Рис. 64. Проведите через C прямую, параллельную AB .

Перейдём теперь к рассмотрению случая, когда две прямые параллельны. Проекция двух параллельных прямых на любую плоскость параллельны между собой (снова напоминаем рис. 18 на стр. 15). Поэтому если $AB \parallel CD$, то $ab \parallel cd$ и $a'b' \parallel c'd'$ (рис. 60).

Одноимённые проекции параллельных прямых параллельны.

Если только вертикальные проекции прямых параллельны друг другу, а горизонтальные проекции не параллельны, то прямые не параллельны: они скрещиваются (прямые AB и CD на рис. 61). Аналогично и прямые EF и GH (на том же рисунке) скрещиваются.

Но если обе пары одноимённых проекций двух прямых, т. е. одновременно и обе горизонтальные, и обе вертикальные проекции двух прямых взаимно параллельны, то и самые прямые параллельны.

Из этого правила есть одно исключение:

если данные прямые профильные, то обе проекции каждой такой прямой перпендикулярны к оси OX и параллельны между собой, т. е. проекции любых двух профильных прямых формально удовлетворяют требованию параллельности прямых; однако они могут оказаться скрещивающимися прямыми (прямые на рис. 62, а), что легко проверить, построив третьи их проекции.

Конечно, две профильные прямые могут быть и параллельными, что также обнаруживается при построении третьей проекции (прямые на рис. 62, б).

У п р а ж н е н и я. 1. На рис. 63 даны несколько эпюров пар прямых. В каждом случае укажите взаимное расположение прямых (пересекаются, скрещиваются или параллельны?).

2. На рис. 64 даны несколько эпюров, на которых изображена прямая AB и точка C . Проведите через точку C прямую, параллельную AB .

ГЛАВА IV ПЛОСКОСТЬ

§ 25. Следы плоскости

Надпилите ножовкой брус, надрежьте лезвием бритвы резинку или ножом коробку спичек (рис. 65, а, б, в). После удаления пилы, бритвы, ножа—на гранях бруса, резинки, коробки останутся следы (рис. 65, г, д, е).

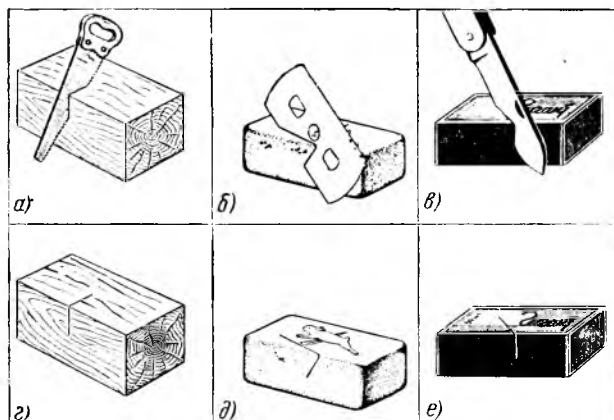


Рис. 65. Следы плоскости.

Пересечение двух плоскостей является взаимным, т. е. если плоскость P пересекает плоскость Q по прямой AB , то плоскость Q в свою очередь пересекает плоскость P по этой же прямой (рис. 66). Прямая AB —общая прямая двух плоскостей P и Q ; она—*след* плоскости P на плоскости Q и она же—*след* плоскости Q на плоскости P .

След плоскости P на горизонтальной плоскости проекций называется *горизонтальным следом* плоскости P и обозначается P_h ; след плоскости P на вертикальной плоскости проекций называется *вертикальным следом* плоскости P

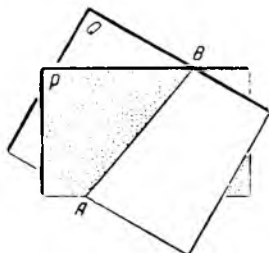


Рис. 66. Прямая пересечения двух плоскостей.

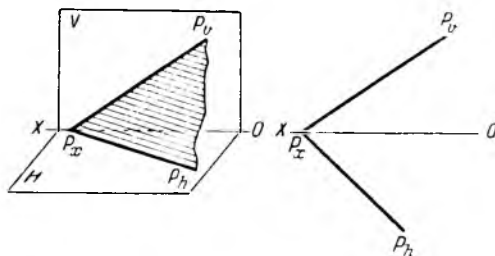


Рис. 67. Горизонтальный и вертикальный следы плоскости.

и обозначается P_v^*). На рис. 67 даны наглядное изображение и эпюр следов плоскости.

*) Иногда рассматривают ещё и третий (профильный) след плоскости (P_w), см. § 27.

Края части плоскости (волнистая линия на рис. 67) на проекциях никогда не изображаются.

Из рис. 65 понятно, что, как бы ни была расположена плоскость пилы по отношению к граням бруса, линии сечения по обоим граням обязательно встречаются на ребре бруса. Вообще при пересечении двух плоскостей третьей плоскостью—оба её следа пересекаются на линии сечения первых двух плоскостей.

Отсюда вытекает правило: *на эюре вертикальный и горизонтальный следы плоскости пересекаются в точке на оси проекций OX* (черт. 67); эта точка называется *точкой схода следов* плоскости; она обозначена буквой P_x .

Заметим, что вертикальная проекция горизонтального следа плоскости, а также горизонтальная проекция вертикального следа плоскости находятся на оси OX .

У п р а ж н е н и е. Где находятся горизонтальные и вертикальные следы самих плоскостей проекций H и V ?

§ 26. Некоторые частные случаи расположения плоскости

Имея на эюре два следа плоскости, можно определить, как эта плоскость расположена в пространстве.

Рассмотрим некоторые частные случаи расположения плоскости (рис. 68).

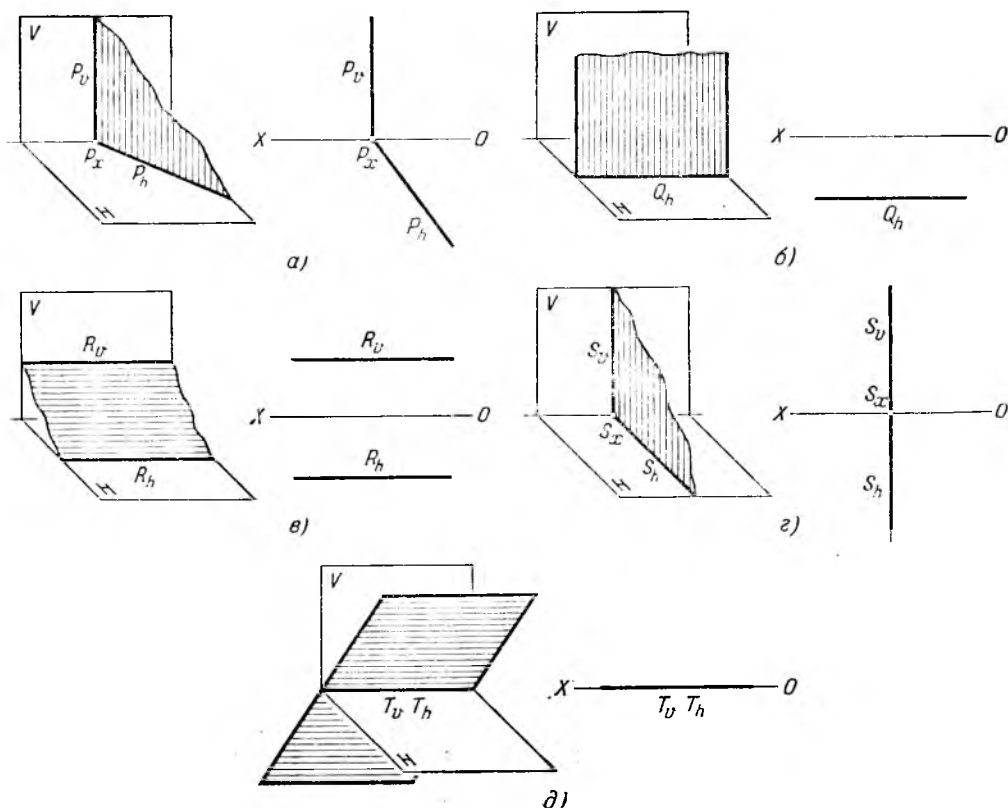


Рис. 68. Частные случаи расположения плоскости. а) $P \perp H$, б) $Q \parallel V$, в) $R \parallel OX$.
г) $S \perp OX$, д) T проходит через OX .

1) Плоскость P перпендикулярна к плоскости H , но расположена случайным образом относительно плоскости V (т. е. не параллельна и не перпендикулярна ей, рис. 68, а). Вертикальный след P_v перпендикулярен к оси проекций.

2) Плоскость Q параллельна плоскости V (рис. 68, б). Горизонтальный след параллелен оси проекций; вертикального следа у такой плоскости нет, потому что Q не пересекает V .

Дальнейшие случаи приведены без пояснений. Читателю рекомендуется изучить рис. 68.

3) Плоскость R параллельна оси проекций, но не параллельна ни V , ни H (рис. 68, в).

4) Плоскость S перпендикулярна к оси проекций (рис. 68, г).

5) Плоскость T проходит через ось проекций (рис. 68, д). В этом случае два следа плоскости ещё не определяют её—через ось OX проходит бесчисленное множество плоскостей; какая именно из них—плоскость T , узнать по её горизонтальному и вертикальному следам нельзя. Как быть в этом единственном случае, когда два следа не определяют плоскость, будет сказано ниже, в § 27.

§ 27. Третий след плоскости

Вернёмся к рис. 65, на котором изображены надрезанные тела, но на этот раз не ограничимся надрезом (рис. 69, а), а продлим плоскость сечения, т. е. отрезем часть тела наизуто (рис. 69, б). Тогда мы получим следы секущей плоскости не только на двух, но и на третьей плоскости, перпендикулярной к первым двум.

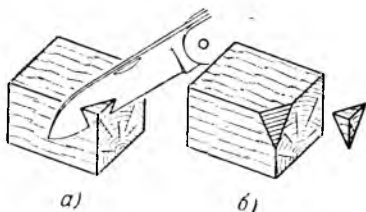


Рис. 69. Часть бруса отрезана «наизуто».

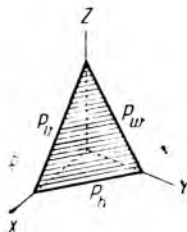


Рис. 70. Три следа плоскости.

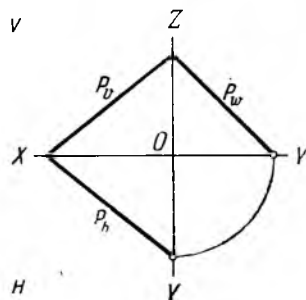


Рис. 71. Построение третьего следа плоскости по двум данным следам.

Таким образом, кроме горизонтального и вертикального следов плоскости P можно рассматривать и её профильный след, т. е. линию её пересечения с профильной плоскостью проекций. Профильный след обозначается P_w .

Эти три следа, вообще говоря*), образуют в пространстве треугольник, что ясно из рис. 70.

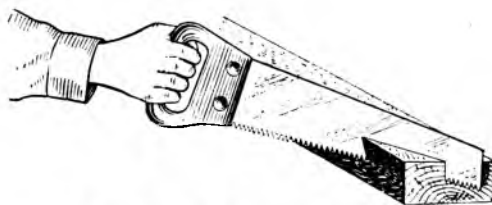


Рис. 72. В чём ошибка?

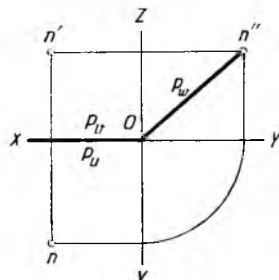


Рис. 73. Плоскость, проходящая через ось OX .

Подобно тому как две проекции точки вполне определяют её положение в пространстве и дают возможность построить её третью проекцию, не находя

*) За исключением случая, когда плоскость P параллельна одной из осей проекций.

самой точки, два следа P_v и P_h плоскости P вполне определяют её положение в пространстве и дают возможность построить её третий след P_w . На рис. 71 показано, как это сделать.

У п р а ж н е н и е. На рис. 72 допущена грубая ошибка. Найдите её.

Третий след позволяет определить положение плоскости, проходящей через ось OX (двух следов её на плоскостях H и V было недостаточно—см. рис. 68, δ на стр. 39). В этом случае нужно задать профильный след (рис. 73), и тогда положение плоскости определится (различные плоскости, проходящие через OX , имеют различные профильные следы).

Очевидно, что для задания (на эюре двух проекций) плоскости, проходящей через ось OX , достаточно задать (кроме следов!) ещё хотя бы одну точку N плоскости, лежащую вне оси OX .

§ 28. Прямая на плоскости

Пусть плоскость P задана следами P_v и P_h (рис. 74). Возьмём произвольную точку A на горизонтальном следе и произвольную точку B на вертикальном следе плоскости. Их проекции — a , a' и b , b' . Соединим точки A и B прямой линией. Поскольку эти точки лежат в плоскости P , соединяющая их прямая AB (прямая I) также лежит в плоскости P . Обращаем внимание читателя на то, что когда мы, имея дело с эюром, говорим «соединим точки A и B », то это значит: «соединим в пространстве точки A и B , а на эюре построим проекции прямой AB ».

Для построения на эюре вертикальной проекции $a'b'$ прямой AB мы должны соединить вертикальные проекции a' и b' точек A и B ; аналогично строится горизонтальная проекция ab этой прямой.

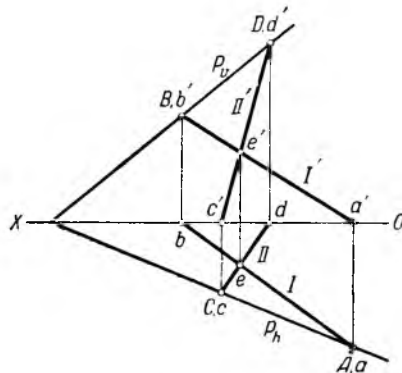


Рис. 74. Прямая, лежащая в плоскости.

Очевидно, горизонтальный след прямой, лежащей в плоскости, лежит на горизонтальном же следе плоскости, а вертикальный след такой прямой—на вертикальном следе плоскости.

Справедливо и обратное:

Если следы прямой лежат на одноимённых *) следах плоскости, то прямая лежит в этой плоскости.

На рис. 74 изображена и другая прямая II , лежащая в данной плоскости P ; её следы C и D . Обе прямые I и II пересекаются в точке E , которая, очевидно, лежит в той же плоскости P . Этот вывод нам будет нужен для понимания следующего параграфа.

§ 29. Точка на плоскости

Дана плоскость P . В ней расположена точка A . Нам задана лишь вертикальная проекция a' этой точки. Требуется найти её горизонтальную проекцию (рис. 75).

Проведем через точку a' произвольную прямую $k'l'$; мы вправе считать $k'l'$ вертикальной проекцией какой-то прямой KL , лежащей в плоскости P и проходящей через точку A ; построение горизонтальной проекции kl прямой KL

*) То-есть горизонтальный след прямой—на горизонтальном следе плоскости, а вертикальный—на вертикальном.

ясно из чертежа. Так как прямая KL проведена через точку A , то точка a должна лежать на kl . Снесем точку a' на прямую $k'l'$ *, получим искомую точку a .

Через точку A проведена и другая прямая (MN), лежащая в той же плоскости P . Конечно, мы получим ту же точку a .

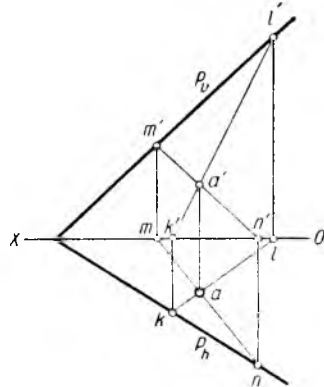


Рис. 75. Точка A лежит в плоскости P .

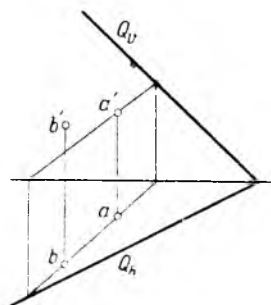


Рис. 76. Лежат ли точки A и B в плоскости Q ?

На рис. 76 даны плоскость Q и две точки— A и B . Требуется выяснить, лежат ли эти точки в плоскости Q .

Построения, аналогичные сделанным выше, показывают, что точка A лежит в плоскости Q , а точка B не лежит в этой плоскости.

У п р а ж н е н и е. Точки A, B, C, D и E лежат в плоскости P (рис. 77); на эюре дано только по одной проекции каждой из этих точек. Построить вторые проекции всех пяти точек.

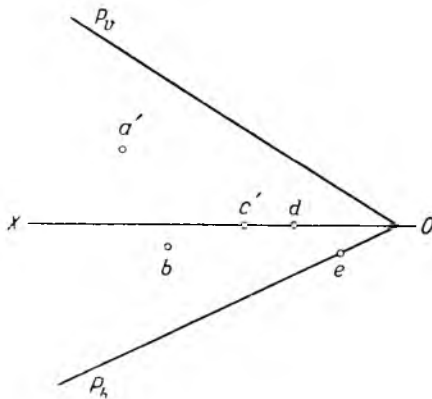


Рис. 77. Построить недостающие проекции точек, лежащих в плоскости P .

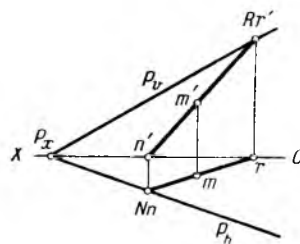


Рис. 78. Найти P_v , зная P_h и точку M , лежащую в плоскости P .

Рассмотрим ещё одну задачу, связанную с точкой, лежащей на данной плоскости.

На эюре дан горизонтальный след P_h плоскости P и точка M на ней (рис. 78); найти вертикальный след этой же плоскости.

Одну точку вертикального следа мы уже знаем: это—точка схода следов P_x , т. е. точка встречи P_h с OX ; остаётся найти ещё хотя бы одну точку вертикального следа.

*) Снести точку на данную прямую—значит провести через эту точку линию, перпендикулярную к оси проекций, и найти её пересечение с данной прямой. Это выражение часто применяют, когда хотят по одной проекции точки найти другую её проекцию. Мы в дальнейшем будем часто пользоваться этим удобным выражением.

Для нахождения этой точки (назовём её R) рассуждаем так: представим себе, что мы нашли проекции одной какой-нибудь прямой, лежащей в нашей плоскости P ; тогда эта прямая пересекла бы плоскость V в точке, которую мы ранее называли вертикальным следом прямой, — точке R , причём эта точка R лежала бы на искомом вертикальном следе P_v плоскости P .

Значит, наша задача сводится к тому, чтобы начертить на эпюре прямую, лежащую в плоскости P . Но для этого нам надо знать всего хотя бы две точки этой прямой. Одна из этих точек нам дана, это — точка M , а вторую точку, например точку N , мы произвольно выберем на следе P_h .

Проекция точки N должны лежать на соответствующих проекциях прямой P_h , т. е. на P_h и OX ; соединив полученную точку N с данной точкой M , получим вспомогательную прямую NM (её проекции — nm , $n'm'$) и найдём её вертикальный след R . Соединив эту точку с точкой P_x , получим искомую прямую P_v .

§ 30. Другие способы задания плоскости

До сих пор плоскость была задана на эпюре своими следами. Можно задать плоскость и иначе, например, тремя лежащими в ней точками (не находящимися на одной прямой), или прямой и точкой вне её, или двумя пересекающимися, либо параллельными прямыми. Научимся находить следы заданной плоскости в каждом из этих случаев.

Для того чтобы найти прямую, достаточно найти какие-либо две точки на ней; задача, следовательно, сводится к нахождению двух точек на каждом из следов плоскости. Как же нам найти хотя бы одну точку на следе плоскости?

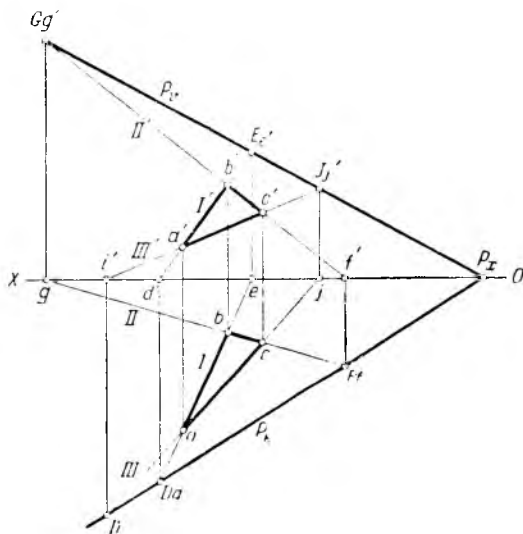


Рис. 79. Построение следов плоскости, заданной тремя точками.

Для этого следует провести какую-нибудь прямую в плоскости и найти её следы. Эта задача рассматривалась в главе III (см. рис. 55 на стр. 34). Найденные следы прямой лежат на одноимённых следах плоскости.

А как провести прямую в плоскости — это зависит от того, каким способом задана плоскость. Например, если плоскость задана двумя прямыми, пересекающимися или параллельными, то прямые, которые мы должны взять, просто даны нам в условии. В других случаях их надо предварительно найти. Покажем это на конкретных примерах для различных способов задания плоскости.

Пример 1. Плоскость P задана тремя точками: A , B и C , не лежащими на одной прямой (рис. 79). Найти её следы.

Проводим через точки A и B прямую I и находим её следы (точки D и E). Таким образом, две точки на следах P уже найдены.

Аналогично находим следы прямых BC и AC . Искомые следы плоскости P : вертикальный P_v —прямая GEJ , а горизонтальный P_h —прямая IDF .

Разумеется, нет необходимости находить для каждого следа плоскости по три точки, но это полезно для контроля точности построений: точки G , E и J должны оказаться на одной прямой (также и точки I , D и F). Кроме того, оба следа должны пересечься в одной точке, P_x , лежащей на оси проекций.

Если мы не хотим находить контрольных точек, то достаточно найти две точки на одном следе и одну точку на другом.

Пример 2. Плоскость задана прямой I и точкой A вне её. В таком

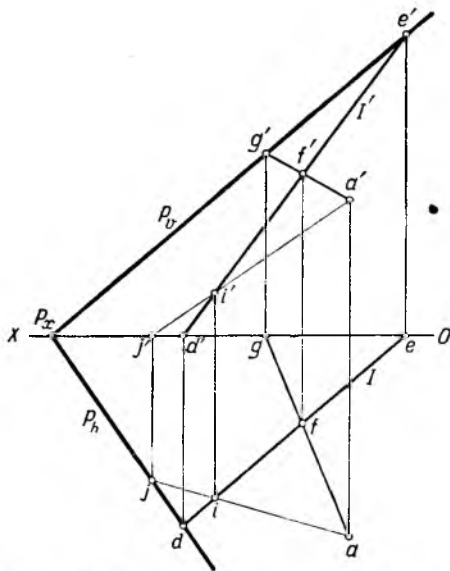


Рис. 80. Построение следов плоскости, заданной точкой и прямой.

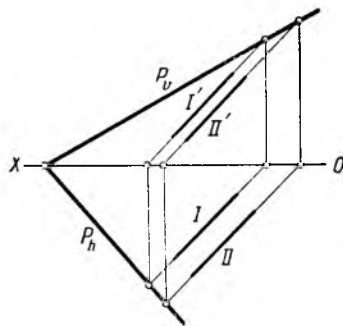


Рис. 81. Построение следов плоскости, заданной двумя параллельными прямыми.

случае за одну из двух нужных нам прямых принимаем саму данную прямую I . Кроме того, соединяя данную точку с произвольной точкой F , взятой на данной прямой, мы получим вторую прямую AG , лежащую в нашей плоскости. Построение показано на рис. 80*).

Пример 3. Плоскость задана двумя прямыми (параллельными или пересекающимися). Это—самый простой случай: надо только найти следы этих прямых. На черт. 81 показано построение следов плоскости, заданной двумя параллельными прямыми I и II .

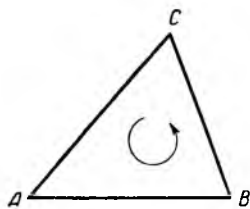


Рис. 82. Этот треугольник читается: ABC , BCA или CAB (но не ACB , CBA , BAC !).

§ 31. Две стороны плоской фигуры

Пусть дан треугольник ABC (рис. 82). Он может быть записан шестью способами:

ABC , BCA , CAB , ACB , CBA , BAC .

Условимся записывать и читать вершины треугольника в порядке обхода его контура против движения часовой стрелки (это направление указано внутри треугольника). В таком случае данный треугольник может быть записан и «прочитан» тремя способами:

ABC , BCA , CAB .

*) Для контроля точности построения взята ещё одна точка (i, i') на прямой I и проведена третья прямая AJ .

Представим себе треугольник в виде тонкой пластинки. Станем рассматривать эту пластинку с оборотной стороны (с изнанки). Оставляя в силе наше условие—читать вершины треугольника, обходя его контур против движения часовой стрелки, оборотную сторону нашей пластинки придётся записать и «прочесть» так:

АСВ, СВА, ВАС.

Рассмотрите треугольник, изображённый на рис. 82, на свет с оборотной стороны (со стр. 43), и вы ясно поймёте всё сказанное.

Если два наблюдателя (соблюдающие правило: обозначать треугольник в порядке обхода его вершин против часовой стрелки) назовут нам один и тот же треугольник, то по этим названиям мы сможем узнать, рассматривают ли они этот треугольник с одной стороны его плоскости или с разных.

Например, один наблюдатель назвал треугольник: *ABC*. Другой наблюдатель назвал этот же треугольник: *ACB*. Значит, они видят треугольную пластинку с разных сторон.

На рис. 83 даны два треугольника—своими проекциями. В то время как первый из них читается на обеих проекциях **о д и н а к о в о** (*abc* и *a'b'c'*), второй читается **р а з л и ч н о** (*acb* и *a'b'c'*); следовательно, первый из них проектируется на обе плоскости проекций одной и той же стороной (*ABC*), тогда как второй проектируется на *V* одной стороной (*ABC*), а на *H*—другой стороной (*ACB*).

Пусть, например, пластинка покрыта с одной стороны точками, а с другой штриховкой. Тогда на рис. 83, *а* обе проекции пластинки *ABC* следует изобразить точками, а на рис. 83, *б* горизонтальную проекцию—штриховкой, а вертикальную точками.

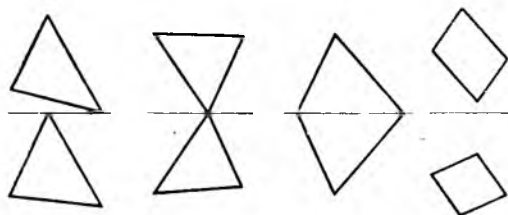


Рис. 84. Какие из этих пластинок проектируются на *H* и на *V* одной и той же стороной и какие—разными?

Это правило о сторонах относится не только к треугольникам, но и к любым плоским фигурам; мы будем неоднократно пользоваться им в дальнейшем.

У п р а ж н е н и е. Определите, проектируются ли данные треугольники и многоугольники (рис. 84) на плоскости *H* и *V* одной и той же или разными сторонами. Постройте третьи проекции. Раскрасьте разными цветами лицевую сторону и изнанку каждой фигуры (разумеется, лицевой можно считать любую сторону).

§ 32. Задание плоской фигуры на эюре

На рис. 85 левый столик опирается на плоскость пола всеми тремя своими ножками. Стул опирается на пол всеми четырьмя своими ножками: концы всех четырёх ножек лежат в одной плоскости. Что касается правого стола, то у него, как и у стула, четыре ножки; однако концы его ножек не лежат в одной плоскости: плоскость, проведённая через концы ножек *A*, *B* и *C*, оказывается ниже

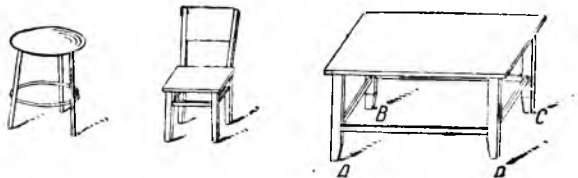


Рис. 85. Правый стол не стоит на всех четырех ножках.

точки D ; поэтому этот четырёхногий стол стоит только на трёх ножках: A , B и C . Если мы нажмём на передний правый угол стола, то точка D опустится, пока не дойдёт до плоскости пола, но одновременно поднимется точка B : плоскость, проведённая через три точки A , C и D , — не проходит через точку B .

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость (и притом только одну!). Поэтому, желая задать треугольник,

мы можем задать все три его вершины (в пространстве или на эюре) совершенно произвольно.

Иначе обстоит дело в том случае, если точек будет не три, а четыре (или ещё больше).

Рассмотрим четыре точки пространства: A , B , C и D (рис. 86, а). Четыре отрезка AB , BC , CD и DA образуют четырёхугольник $ABCD$. Как узнать, является ли этот четырёхугольник плоским?

Если плоскость, проведённая через любые три из этих вершин, пройдёт и через четвертую, то фигура $ABCD$ — плоская. В этом случае прямая, проведённая через любые две из четырёх данных точек, пересечёт прямую, проведённую через две другие данные точки (или будет ей параллельна); например, диагонали AC и BD встретятся в точке E (рис. 86, б).

Если же плоскость, проведённая через любые три из этих вершин, не пройдёт через четвертую, то фигура $ABCD$ — не плоская. В этом случае прямая, проведённая через любые две из четырёх данных точек, скрещивается

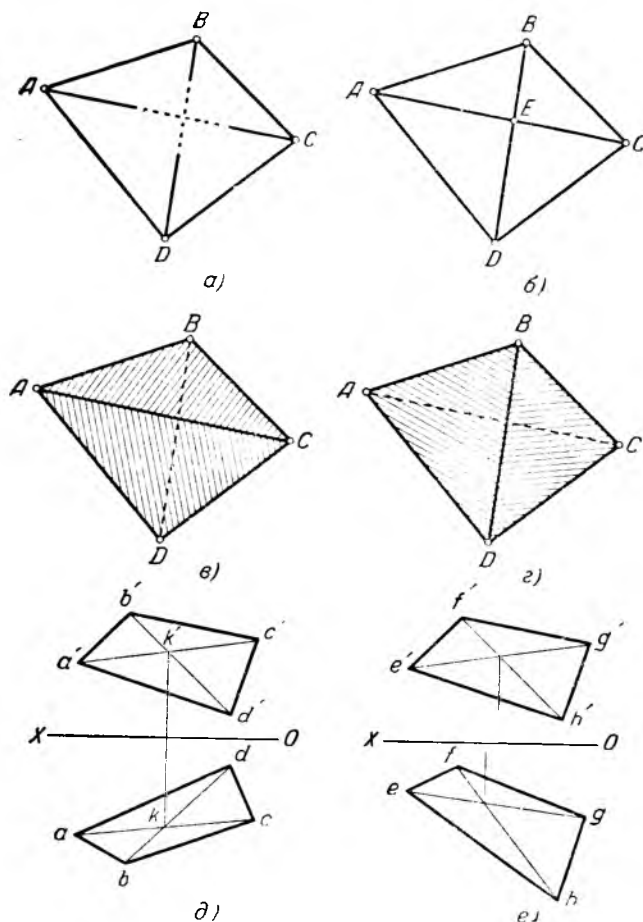


Рис. 86. а) Плоский ли четырёхугольник $ABCD$? б) Этот четырёхугольник $ABCD$ — плоский. в) и г) Эти четырёхугольники $ABCD$ — неплоские. д) Эпюр плоского четырёхугольника. е) Эпюр неплоского четырёхугольника.

с прямой, проведённой через две другие точки; поэтому диагональ AC (или BD) явится общей стороной двух треугольников, не лежащих в одной плоскости (рис. 86, в или г).

Возвратимся к поставленному выше вопросу: «является ли четырёхугольник плоским?» Если нам дана только одна проекция четырёхугольника (рис. 86, а), то ответить на этот вопрос нельзя: как показывают рис. 86, б, в и г, четырёхугольник $ABCD$ может быть и плоским, и не плоским.

Но если даны две проекции четырёхугольника (рис. 86, д или 86, е), то нетрудно дать верный ответ.

В самом деле, если фигура $ABCD$ — плоская, то прямая, проходящая через любые две точки фигуры, целиком лежит в её плоскости. Проведём диагонали

AC и BD . Так как точки k и k' (рис. 86, ∂) пересечения проекций оказались на одном перпендикуляре к оси проекций, то прямые AC и BD пересекаются в точке K , т. е. лежат в одной плоскости *).

Итак, четырёхугольник $ABCD$ на рис. 86, ∂ — плоский.

Четырёхугольник же $EFGH$ на рис. 86, e не является плоским (почему)?

Итак, через четыре взятые наудачу точки, вообще говоря, нельзя провести плоскость (только случайно они могут оказаться в одной плоскости).

Поэтому, желая задать на эюре плоский четырёхугольник, нельзя задать все четыре вершины наудачу (как это возможно для треугольника). Можно поступить так (рис. 87): три вершины A , B и C задать произвольно, а для четвёртой вершины D задать только одну проекцию (например, горизонтальную проекцию d). В таком случае недостающая вторая проекция вершины D может быть

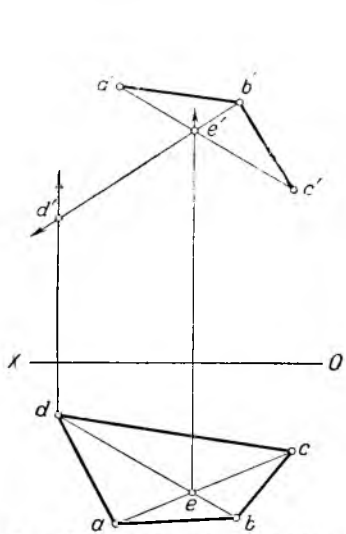


Рис. 87. Построить вертикальную проекцию плоского четырёхугольника $ABCD$.

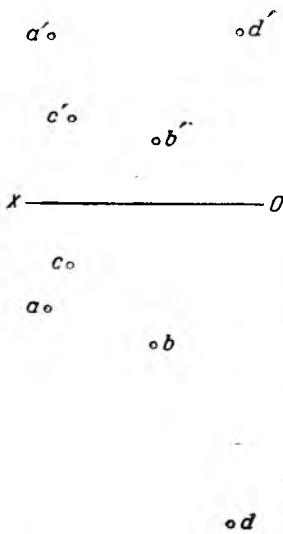


Рис. 88. Лежат ли эти четыре точки в одной плоскости?

построена, исходя из условия, что точка D должна лежать в плоскости, которая уже определилась заданием точек A , B , C .

Проводим ac и bd ; точку их пересечения обозначим e . Затем про-

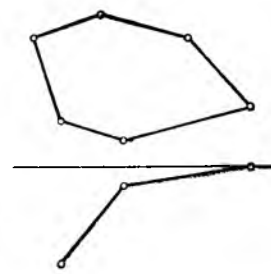


Рис. 89. Постройте горизонтальную проекцию.

водим $a'c'$ ($b'd'$ пока ещё провести нельзя, так как нет точки d'). Снесём точку e на прямую $a'c'$; получим точку e' . Теперь проводим $b'e'$. Пересечение $b'e'$ с перпендикуляром к оси проекций из точки d даёт нам искомую точку d' .

У п р а ж н е н и я. 1. Лежат ли точки A , B , C , D (рис. 88) в одной плоскости?

2. Постройте горизонтальную проекцию плоского шестиугольника (рис. 89).

§ 33. Признак параллельности плоскостей

Две плоскости могут либо пересекаться, либо быть параллельными. Как различить эти случаи на эюре?

Так как две параллельные плоскости пересекаются произвольной третьей плоскостью по параллельным прямым, то горизонтальные следы параллельных плоскостей параллельны друг другу. То же можно сказать и о вертикальных следах параллельных плоскостей.

Следовательно, *одноимённые следы двух параллельных плоскостей взаимно параллельны*.

В общем случае справедливо и обратное положение: *Если одноимённые следы двух плоскостей взаимно параллельны, то такие две плоскости параллельны*.

*) Мы придём к тому же выводу, если вместо проведения диагоналей продолжим до пересечения противоположные стороны фигуры AB и CD или AD и BC . Но точка пересечения может оказаться далеко за пределами чертежа.

(рис. 90)*). Но есть одно исключение: если все четыре следа двух плоскостей P и Q параллельны оси проекций, то ещё нельзя утверждать, что эти плоскости параллельны друг другу. В самом деле, любые две плоскости, параллельные оси проекций, имеют параллельные следы; однако сами плоскости могут и не

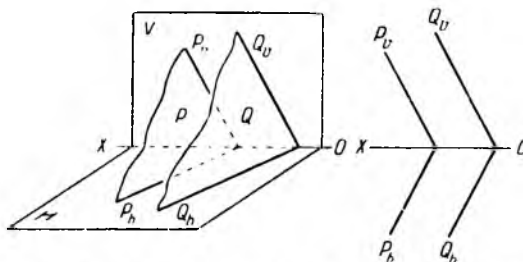


Рис. 90. У параллельных плоскостей одноимённые следы параллельны.

быть параллельными (рис. 91). Ответ на вопрос: «параллельны ли две плоскости, все четыре следа которых параллельны оси OX ?» дают их следы на третьей плоскости проекций. На рис. 92 плоскости P и Q параллельны.

Если взаимно параллельны только вертикальные или только горизонтальные следы, то плоскости не параллельны.

§ 34. Проведение плоскости, параллельной данной (Некоторые частные случаи)

Решим несколько задач.

1) Дана плоскость P (своими следами) и точка A , лежащая на вертикальной плоскости проекций (рис. 93). Требуется провести через точку A плоскость Q , параллельную P .

Проведём через вертикальную проекцию a^v (она совпадает с самой точкой A) прямую Q_v параллельно P_v и через точку Q_x пересечения Q_v с OX (точку схода следов плоскости Q) проведём прямую Q_h параллельно P_h . Q_v и Q_h — следы искомой плоскости.

2) Требуется провести через точку B плоскость Q , параллельную вертикальной плоскости P (рис. 94). Построение ясно из чертежа.

3) Провести через точку C плоскость Q , параллельную плоскости H (т. е. горизонтальную плоскость) (рис. 95).

Проводим через c' прямую Q_v параллельно OX . Это — единственный след искомой плоскости.

В этих трёх задачах мы построили плоскость, параллельную данной, в нескольких простейших случаях; решение задачи в общем случае будет рассмотрено дальше (в § 46, стр. 67).

§ 35. Линия пересечения двух плоскостей, заданных следами

На рис. 96, а даны две плоскости P и Q своими следами. Требуется найти прямую пересечения этих плоскостей. Будем искать следы этой прямой; по следам мы уже умеем строить саму прямую. Для этого рассуждаем так.

Искомая прямая лежит как в плоскости P , так и в плоскости Q . Следовательно, её вертикальный след K лежит на пересечении вертикальных следов P_v и Q_v обеих плоскостей. Вертикальная проекция k' точки K совпадает с самой точкой K , а её горизонтальная проекция лежит на оси проекций.

*) Это вытекает из следующей теоремы элементарной геометрии: «Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны».

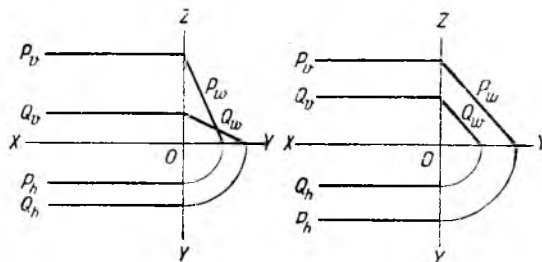
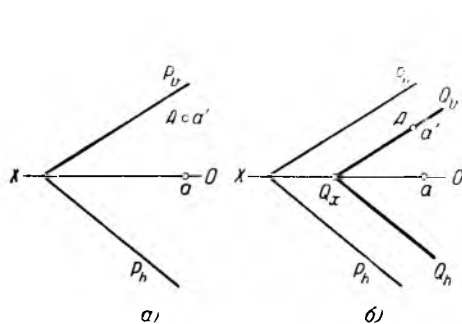
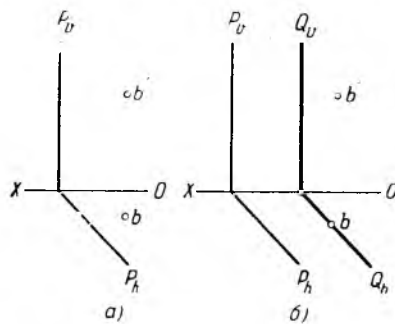
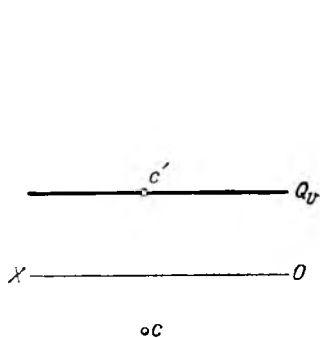
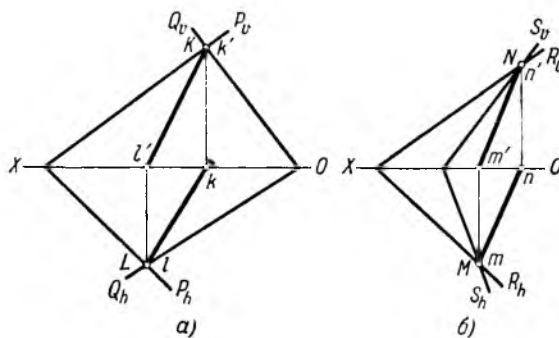
Рис. 91. Плоскости P и Q не параллельны.Рис. 92. Плоскости P и Q параллельны.Рис. 93. Через точку A провести плоскость, параллельную плоскости P .Рис. 94. Через точку B провести плоскость, параллельную вертикальной плоскости P .Рис. 95. Через точку C провести горизонтальную плоскость Q .

Рис. 96. Прямая пересечения двух плоскостей.

Аналогично находим и горизонтальный след L линии пересечения наших плоскостей.

Две точки искомой прямой найдены. Соединяя проекции k' с l' и k с l прямыми линиями, получаем искомую прямую KL .

На рис. 96, б дано другое расположение плоскостей R и S . Линия MN их пересечения находится точно таким же образом.

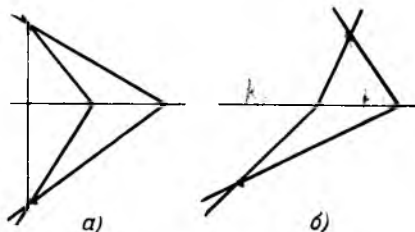


Рис. 97. Найдите прямые пересечения двух пар плоскостей.

У п р а ж н е н и е. Постройте линии пересечения двух пар плоскостей, заданных следами на рис. 97.

До сих пор мы рассматривали произвольное (общее) положение двух плоскостей и искали прямую их пересечения. Теперь мы рассмотрим некоторые частные случаи.

1) На рис. 98, а одна из двух плоскостей — именно плоскость P — вертикальна.

В этом случае задача несколько упрощается: здесь горизонтальную проекцию линии пересечения строить не приходится, она совпадает со следом P_h (почему?). Следовательно, достаточно отметить точки k , k' и l , найти l' и соединить k' с l' . Прямая KL найдена.

2) На рис. 98, б обе плоскости R и S вертикальны и, следовательно, искомая линия их пересечения также вертикальна; поэтому горизонтальные проекции

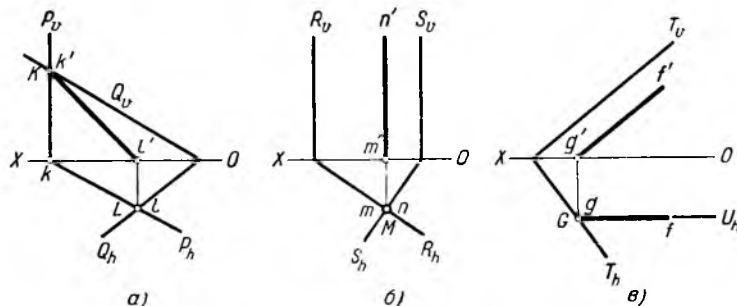


Рис. 98. Построение прямой пересечения двух плоскостей в частных случаях.

m и n любых точек M и N линии пересечения совпадают; точка m (n) находится на пересечении P_h и Q_h , а вертикальная проекция $m'n'$ перпендикулярна к оси проекций.

3) На рис. 98, в плоскость U параллельна плоскости V ; плоскость же T занимает случайное положение. Точка G пересечения горизонтальных следов двух данных плоскостей является, как и в общем случае, одной из точек искомой линии сечения GF , вторую же точку — точку пересечения вертикальных следов — найти нельзя по той простой причине, что плоскость U вертикального следа не имеет вовсе.

Линию GF пересечения плоскостей находим, исходя из следующих соображений.

Плоскость U вертикальна; поэтому всякая лежащая на ней прямая (в том числе и искомая прямая GF) проектируется на плоскость H по прямой U_h ; таким образом, горизонтальная проекция прямой GF — прямая gf — найдена.

Плоскость U параллельна V , а плоскость T пересекает обе эти плоскости: первую из них — по искомой линии GF , а вторую — по T_v . Эти прямые должны быть параллельны: $GF \parallel T_v$. Но мы знаем, что одноимённые проекции параллельных прямых также параллельны, следовательно, прямая $g'f'$ параллельна T_v ; нам остаётся провести на чертеже через точку g' прямую $g'f'$ параллельно T_v ; обе проекции прямой GF найдены.

У п р а ж н е н и я. 1. Постройте линию пересечения двух плоскостей, заданных следами (три случая; рис. 99).

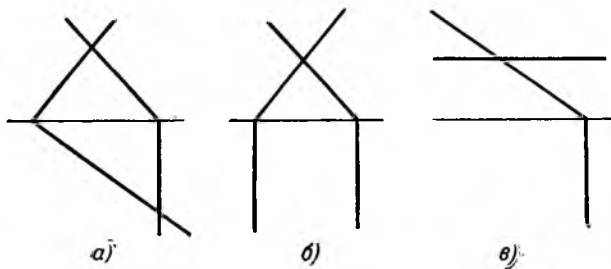


Рис. 99. Найдите прямую пересечения двух плоскостей.

2. Сделайте следующий опыт. Приоткройте немного дверь из тёмной комнаты в соседнюю, освещённую яркой лампой. Лучи света, войдя в щель, образуют вертикальную «световую плоскость» (рис. 100). Где следы этой плоскости на H (на полу) и на V (на стене)? Как расположатся эти следы на эюре?

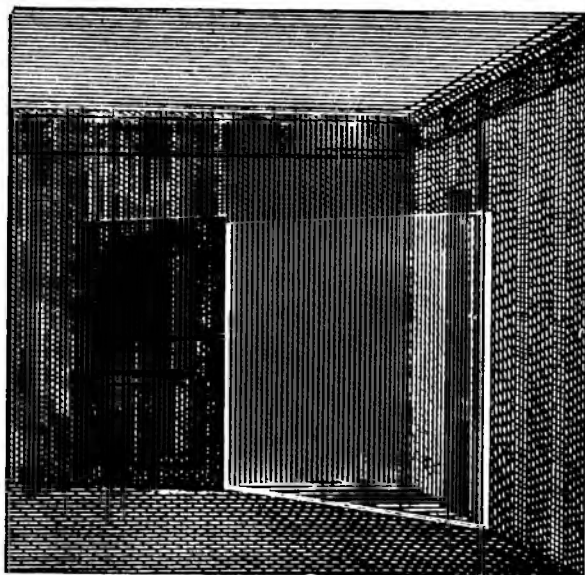


Рис. 100. Вертикальная световая плоскость.

Опыт можно продолжить, если вы вооружитесь большим листом картона и будете придавать этому листу различные положения на пути световой плоскости. Вы получите пересечения вертикальной и наклонной плоскости.

Если плоскости проекций заданы не следами, а каким-либо другим способом (например тремя точками), то линия их сечения строится иначе; эта задача будет рассмотрена далее (§ 43).

ГЛАВА V

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НА ТОЧКУ, ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

§ 36. Взаимное положение прямой и плоскости

По отношению к плоскости прямая линия может занимать одно из трёх положений:

- 1) Прямая лежит в данной плоскости. В этом случае прямая и плоскость имеют бесконечное количество общих точек.
- 2) Прямая пересекает данную плоскость. В этом случае прямая и плоскость имеют одну общую точку. В частности, особый интерес представляет случай, когда прямая перпендикулярна к данной плоскости.
- 3) Прямая параллельна данной плоскости. В этом случае прямая и плоскость не имеют общих точек.

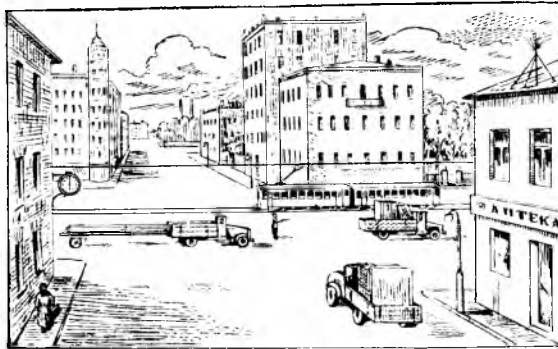


Рис. 101. На улице.

Многочисленные примеры этих случаев можно найти на рис. 101. Трамвайные рельсы лежат в плоскости мостовой. Провода, питающие вагоны трамвая током, параллельны той же плоскости. Фонарный столб перпендикулярен к той же плоскости. Растяжки антенны пересекают плоскость крыши, а их продолжение пересекает и плоскость мостовой.

У п р а ж н е н и е. Найдите на этом рисунке несколько прямых, лежащих в вертикальной плоскости стены здания, параллельных ей, перпендикулярных к ней, пересекающих её. На одном грузовике везут трубы, на другом листы фанеры; проследите за изменениями взаимного положения прямой (трубы) и плоскостей (мостовой, стен) при повороте автомобиля; то же в отношении плоскости (фанеры). Как изменяется положение стрелок часов относительно горизонтальной плоскости мостовой? вертикальной плоскости стены?

В этой книге будут подробно рассмотрены первые два случая; третий случай—прямая параллельна плоскости—предоставляем читателю рассмотреть самостоятельно (в этом случае в плоскости можно провести прямые, параллельные данной прямой).

§ 37. Лежит ли прямая в плоскости?

Как узнать по эпюру—л е ж и т ли данная прямая в данной плоскости?

Мы уже ответили на этот вопрос (гл. IV, § 28, стр. 41) в том случае, когда плоскость была задана следами: *прямая лежит в плоскости, если следы прямой находятся на следах плоскости.*

В тех случаях, когда плоскость задана не следами, а каким-либо иным способом, можно свести задачу к предыдущей, построив следы плоскости; однако часто можно решить задачу и проще, не строя следов плоскости.

Пусть, например, плоскость P задана двумя прямыми AB и CD — пересекающимися (рис. 102, а) или параллельными (рис. 102, б). Требуется установить, лежит ли прямая I в плоскости P . Рассуждение будет одно и то же для обеих чертежей: 102, а и 102, б.

Попытаемся найти точки K и L встречи прямой I с прямыми AB и CD .

На эпюре задача сведётся к нахождению проекций точек K и L . Это будут точки k, k' и l, l' . Так как пара точек k и k' оказывается лежащей на одном перпендикуляре к оси OX , и другая пара l и l' — также на одном перпендикуляре, то существуют точки K и L , в которых прямая I встречается с прямыми AB и CD . Следовательно, прямая I лежит в плоскости P , определяемой прямыми AB и CD .

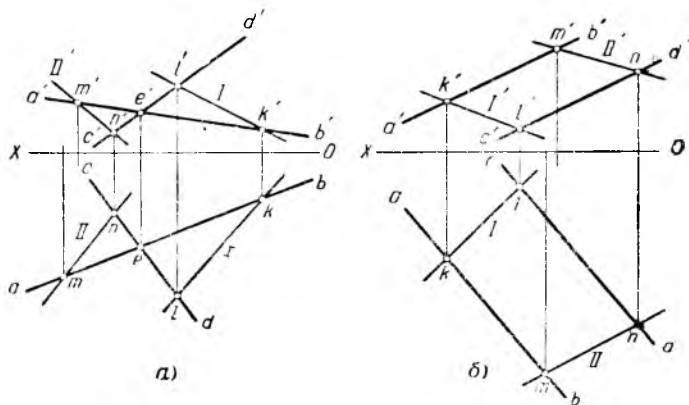


Рис. 102. Лежит ли прямая в плоскости, заданной двумя другими прямыми?

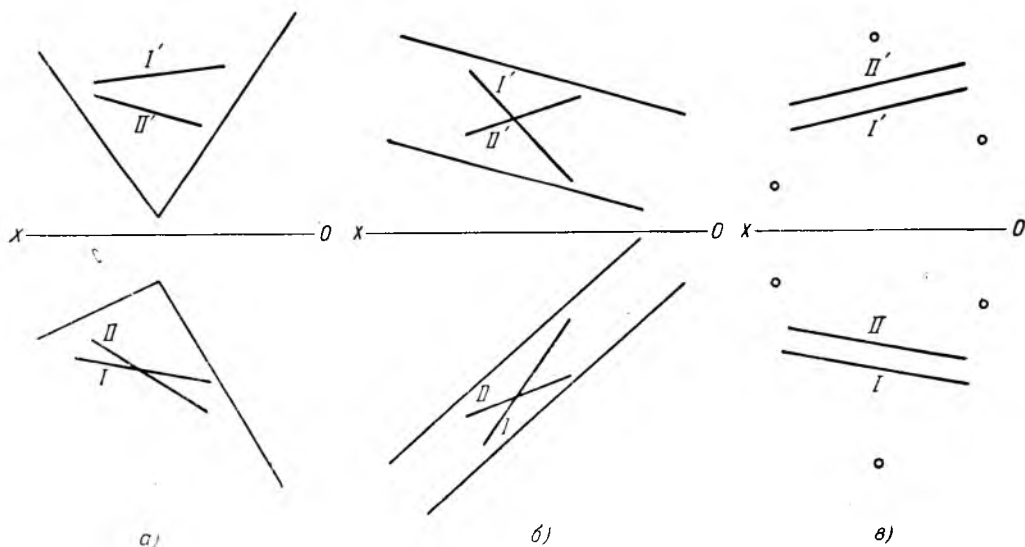


Рис. 103. Определите, лежат ли прямые I и II в плоскости, заданной двумя прямыми или тремя точками.

Прямая же II не лежит в плоскости P , так как точки m и m' не лежат на одном перпендикуляре к оси проекций.

У п р а ж н е н и е. Определите, лежат ли прямые I и II (рис. 103) в плоскостях, заданных двумя пересекающимися прямыми, двумя параллельными прямыми, тремя точками.

§ 38. Точка пересечения прямой и плоскости

Переходим ко второму случаю взаимного положения прямой и плоскости— прямая пересекает плоскость. В этом случае возникает задача: найти точку их пересечения.

Мы уже умеем строить линию пересечения двух плоскостей (см. § 35 на стр. 48). Казалось бы, что ещё легче найти точку, в которой прямая пересекается с плоскостью. Однако оказывается, что эта задача сложнее первой. Для отыскания точки встречи прямой с плоскостью надо сначала построить линию пересечения двух плоскостей: заданной и вспомогательной.

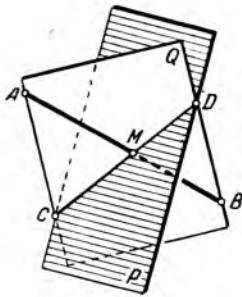


Рис. 104. Как решается задача «найти точку пересечения прямой с плоскостью».

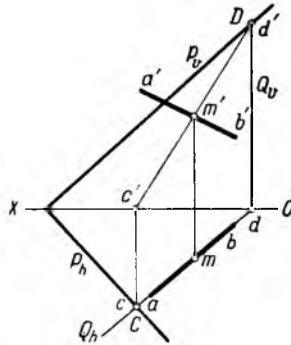


Рис. 105. Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью, заданной своими следами.

Общий метод нахождения точки встречи прямой AB с плоскостью P (рис. 104) состоит в том, что мы проводим через данную прямую вспомогательную плоскость Q и находим линию CD сечения двух плоскостей P и Q . Теперь в плоскости Q оказываются две прямые: AB

и CD . Точка M встречи прямой AB с прямой CD и есть искомая точка. Этот план решения задачи необходимо хорошо запомнить; читателю полезно повторить всё сказанное, не глядя на рисунок.

При решении этой задачи на эпюре вспомогательную плоскость Q следует выбирать так, чтобы упростить построения.

Рассмотрим следующий пример. Требуется найти точку встречи прямой AB с плоскостью P , заданной следами (рис. 105).

Проводим через данную прямую AB вспомогательную горизонтально-проектирующую плоскость Q . В таком случае Q_h совпадает с ab , а Q_v будет направлен перпендикулярно к OX . Таким образом, следы плоскости Q построены. Точки пересечения следов плоскостей P и Q обозначим буквами C и D ; прямая CD есть линия пересечения плоскостей P и Q . Точка M (точка пересечения AB и CD) является искомой точкой встречи AB с P .

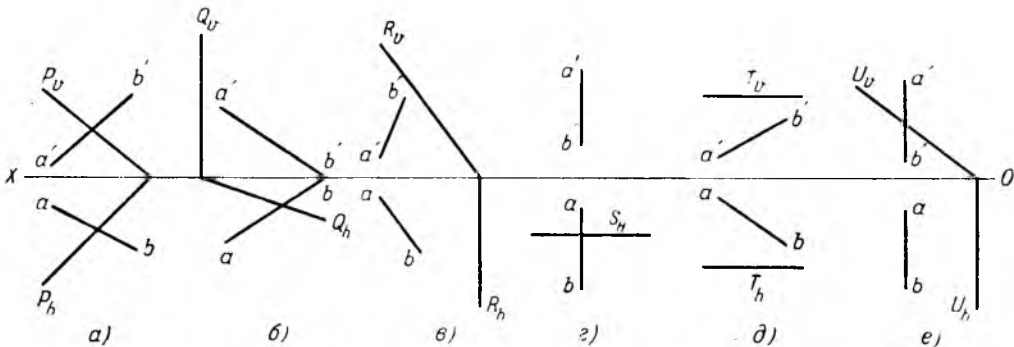


Рис. 106. Найдите точку пересечения прямой с плоскостью.

У п р а ж н е н и е. Найти точку встречи прямой с плоскостью, заданной следами, в шести случаях, изображённых на рис. 106. В тех случаях, когда это возможно, найдите точку встречи дважды: беря в качестве вспомогательной плоскости сначала горизонтально-проектирующую, а затем—вертикально-проектирующую.

§ 39. Пересечение прямой линии с треугольной пластинкой

Найдём точку встречи прямой RS с треугольной пластинкой ABC (рис. 107).

Проведём через данную прямую RS вспомогательную горизонтально-проектирующую плоскость Q . Её горизонтальный след Q_h совпадает с rs (рис. 107, а); вертикального следа можно не чертить. Найдём линию пересечения данной плоскости ABC с вспомогательной плоскостью Q . Из рассмотрения горизонтальной проекции видно, что прямая ac встречается Q_h в точке k , а прямая bc —в точке l . Так как плоскость Q вертикальна, то прямая AC встречается плоскость Q в точке K , а прямая BC —в точке L . Найдём k' на $a'c'$ и l' на $b'c'$ и соединим k' с l' . Прямая KL —линия пересечения данной плоскости ABC с вспомогательной плоскостью Q .

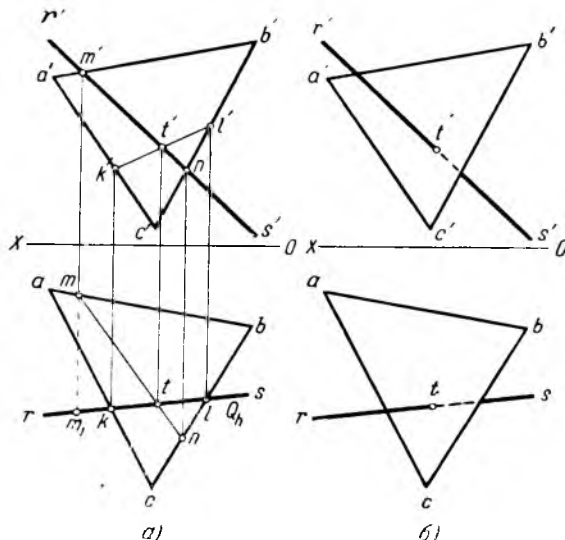


Рис. 107. Пересечение прямой с треугольной пластинкой.

Прямые KL и RS пересекаются в точке T . Следовательно, T —искомая точка встречи прямой RS с плоскостью ABC .

На этом же рисунке 107, а точка T найдена и другим способом: вспомогательная плоскость, проходящая через прямую RS , взята вертикально-проектирующей. Построение совершенно аналогично предыдущему; только горизонтальная и вертикальная проекции меняются ролями.

Совпадение проекций точки T , найденных двумя способами, указывает на точность построений.

Если бы точка T оказалась вне треугольника ABC , то мы заключили бы, что данная прямая не пересекает треугольную пластинку, хотя и пересекает её плоскость.

Итак, на вопрос, поставленный в начале данного параграфа: «найти точку встречи прямой RS с треугольной пластинкой ABC » получен ответ: «точка T ».

Однако на этом задача ещё не закончена; следует ещё выделить видимые и невидимые элементы. Что это такое—будет объяснено в следующих двух параграфах, а затем мы возвратимся к только что решённой задаче.

§ 40. Примеры видимых и невидимых элементов

Как обращен к нам легковой автомобиль, силуэт которого дан на рис. 108, а? Радиатором или багажником? По одному лишь силуэту ответить на этот вопрос нельзя, так как возможны оба случая (рис. 108, б и 108, в).

Перерисуйте контур (рис. 108, а) силуэта автомобиля со всеми просветами на прозрачную бумагу (кальку) и наложите его на рисунок 108, б, а за-

тем—на рис. 108, *в*. Вы убедитесь, что контуры всех трёх рисунков совершенно одинаковы*).

На рис. 108, *б* мы видим радиатор, передний бугер, фары автомобиля; это—*видимые элементы* на этом рисунке. Багажник, задний бугер, номер автомобиля—*невидимые элементы* на этом рисунке. Наоборот, на рис. 108, *в* видимые элементы—багажник, задний бугер, номер, а невидимые—радиатор, передний бугер, фары.

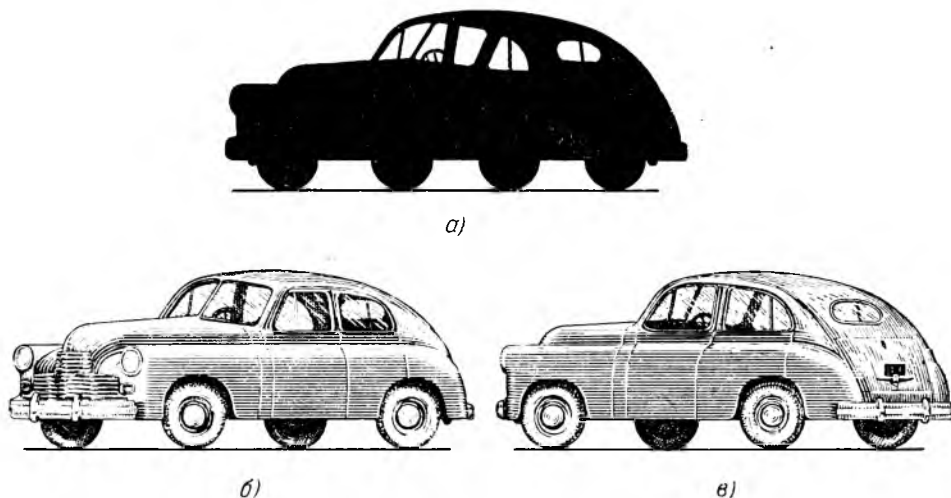


Рис. 108. Автомобиль. Силуэт *а*) может быть точно наложен, как на рис. *б*) так и на рис. *в*).

Левые дверцы автомобиля—видимые элементы на обоих рисунках, а правые—невидимые элементы на обоих рисунках.

Приведём ещё другие примеры. На рис. 109, *а* изображён силуэт конуса. Видим ли мы его основание? Возможны оба случая: на рис. 109, *б* основание видимое, а на рис. 109, *в*—невидимое.

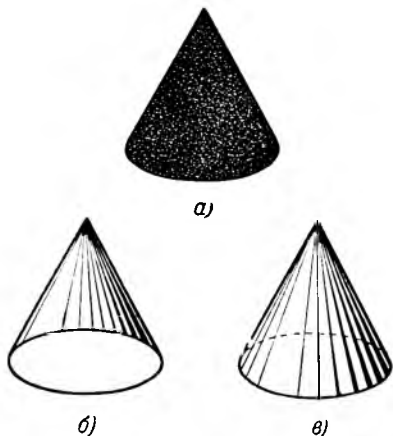


Рис. 109. Конус.

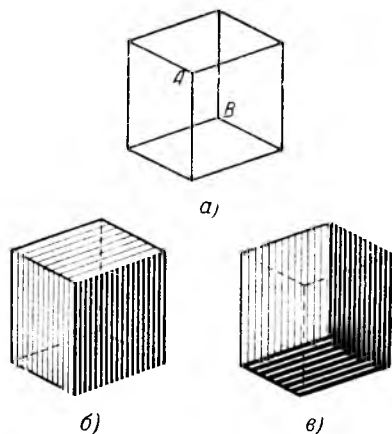


Рис. 110. Куб: *а*)—проволочный каркас, *б*) и *в*)—каркас обшит.

На рис. 110, *а* изображён проволочный каркас куба. Мы видим все 12 рёбер куба и все 8 его вершин. Обойдём куб каким-либо непрозрачным материалом. Контур изображения куба при этом, конечно, не изменится; по-

*) Это свойство силуэта справедливо только для параллельных проекций.

этому все рёбра и вершины контура изображения куба (6 рёбер и 6 вершин) останутся видимыми. А остальные 6 рёбер и 2 вершины куба? Из них будут видимы только 3 ребра и 1 вершина, а 3 других ребра и 1 вершина будут невидимыми.

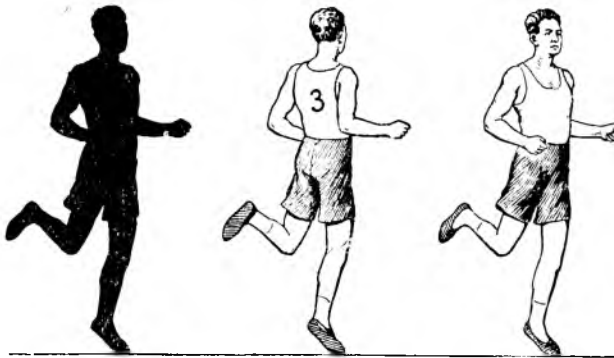


Рис. 111. Бегун (силуэт, вид сзади и спереди).

Но какая из вершин—*A* или *B*—проволочной модели будет видимой, а какая—невидимой?

Это зависит от того, какая из них ближе к нам; она-то и будет видимой, а та вершина, которая дальше от нас, окажется закрытой непрозрачным материалом обшивки граней. Оба случая изображены на рис. 110, *б* и 110, *в*.

На рис. 111 слева дан силуэт бегуна. Куда он бежит: к нам или от нас? Как видно, при том же силуэте возможны оба случая.

При изображении тел важно определить видимые и невидимые элементы. Заметим, что *контур изображения всегда видим*.

Упражнения. 1. Поместите силуэт табуретки (рис. 112) на расстоянии вытянутой руки и, прищурив глаза, представьте себе последовательно, что 1) впереди—левая ножка табуретки, 2) впереди—правая ножка. Нарисуйте табуретку в обоих случаях.

2. На рис. 113 изображены электрическая лампа с коническим абажуром, книга, пресспапье и полуботинок. Срисуйте контуры этих предметов и зачерните их; получатся силуэты. Нарисуйте ещё раз контуры и дорисуйте их внутри так, чтобы получились изображения тех же предметов, но уже рассматриваемых с другой стороны. При этом некоторые видимые ранее элементы станут невидимыми, а некоторые ранее невидимые элементы, наоборот, ста-



Рис. 112. Силуэт табуретки.

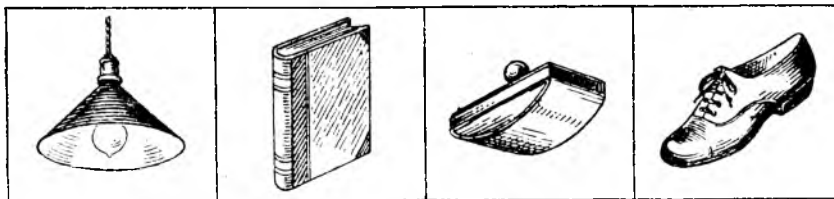


Рис. 113. Нарисуйте другие изображения этих предметов, сохранив их контуры.

нут видимыми. Некоторые элементы будут видимыми (а некоторые—невидимыми) на обоих изображениях.

Обратите внимание на то, что на новом изображении полуботинок из левого делается правым.

§ 41. Определение видимости на эюре

На эюрах часто для большей наглядности различают видимые и невидимые элементы, изображая видимые линии сплошными, а невидимые линии—пунктиром или даже совсем их не вычерчивая.

Как же установить, какие элементы являются невидимыми, например, в задаче § 39 (стр. 55)?

Для того чтобы научиться отвечать на этот вопрос, решим предварительно следующую задачу. На рис. 114, *a* изображены две скрещивающиеся прямые AB и CD . Точка пересечения горизонтальных проекций этих прямых (p, q) является проекцией двух различных точек P и Q данных прямых; вертикальные проекции этих точек: p' —на прямой $c'd'$ и q' —на прямой $a'b'$.

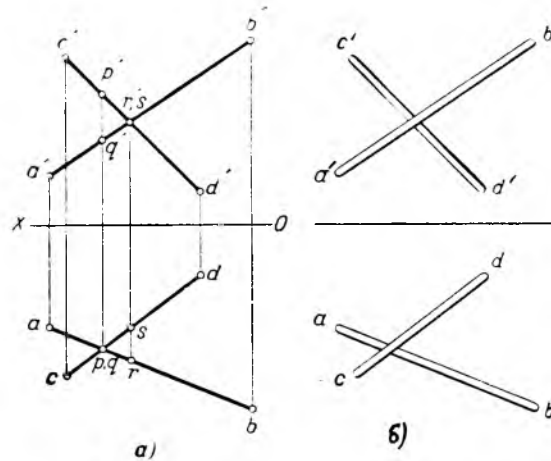


Рис. 114. Определение видимости в случае двух скрещивающихся прямых.

Очевидно, рассматривая эти прямые сверху, мы увидим на горизонтальной проекции точки P и Q слившимися. Какая же из них закрывает другую, если считать прямые непрозрачными? Какая из них выше, ближе к нашему глазу?

Ответ на этот вопрос даёт нам вертикальная проекция. Точка p' дальше от оси, чем q' , следовательно, P выше, чем Q , и закрывает её; при непрозрачных прямых мы имели бы вид сверху, изображённый на рис. 114, *б* (нижний).

Изучение вертикальной проекции ведётся таким же образом. Здесь (рис. 114, *a*) точка (r', s') является одновременно вертикальной проекцией точки R на прямой AB и точки S на прямой CD ; горизонтальные проекции этих точек различны (r и s). Какая же из этих точек будет невидимой, закрытой на вертикальной проекции (при виде спереди)?

Представив себе эюр согнутым под прямым углом по оси проекций, мы легко ответим и на этот вопрос: видна будет та точка, горизонтальная проекция которой будет ближе к глазу; в данном случае R закрывает S , и мы имели бы в случае непрозрачных прямых вид, представленный на рис. 114, *б* (верхний).

Сформулируем общее правило:

Если на эюре совпадают горизонтальные или вертикальные проекции двух точек, то видимой из них является та, другая проекция которой находится дальше от оси проекций.

Упражнение. На эюре (рис. 115, *a*) изображены три палки *I*, *II* и *III*. Все левые концы этих палок лежат на одной прямой, перпендикулярной к оси проекций; то же можно сказать и о правых концах. Следовательно, каждой вертикальной проекции палки мо-

жет соответствовать любая из трёх горизонтальных проекций палок, и наоборот. Поэтому мы, обозначив вертикальные проекции палок I' , II' и III' , можем расставить цифры I , II и III у горизонтальных проекций как угодно. На рис. 115, б изображен один из этих вариантов, и на нём установлено (способом, изложенным выше), какая палка какую закрывает.

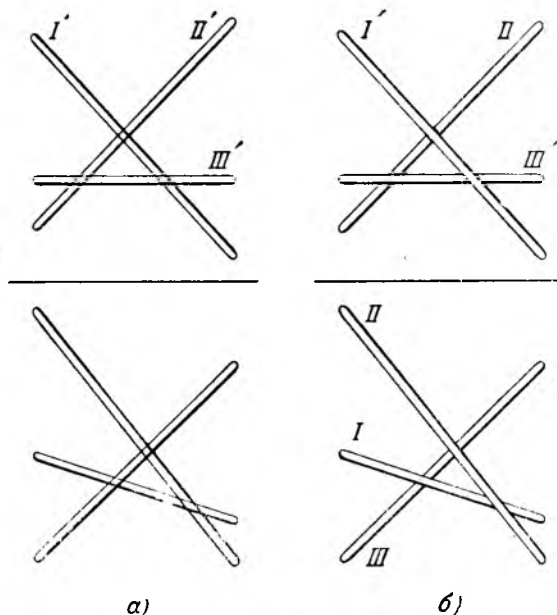


Рис. 115. Три палки.

Изобразите все возможные комбинации расположения цифр I , II и III на всех полученных эпюрах. Определив видимость, закрасьте палки тремя разными цветами. Всего может быть 6 комбинаций.

Сделайте из трёх карандашей разных цветов модели найденных вами расположений палок.

§ 42. Выделение видимых элементов при пересечении прямой с плоскостью

Во дворе лежит сломанная паровозная ось, наглухо соединённая с диском колеса (рис. 116). В одном случае оба мальчика видят шейку оси, в другом

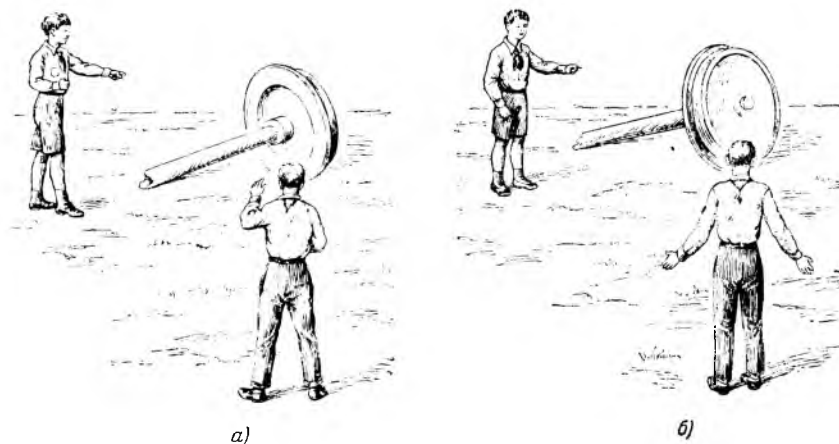


Рис. 116. Сломанная паровозная ось.

случае один видит её, а другой—не видит, так как она закрыта от него диском колеса.

Подобно этому на одной из проекций эпюра может быть видимой одна часть прямой, а на другой проекции того же эпюра—либо та же самая, либо другая часть этой прямой.

Вернёмся к задаче о пересечении прямой линии с треугольной пластинкой (§ 39, рис. 107). Обратим внимание на следующее обстоятельство. Эпюр на рис. 107 можно рассматривать как «вид сверху» и «вид спереди» на треугольник и прямую; при этом предполагается, что треугольник—прозрачный и что, следовательно, он не мешает нам видеть заданный отрезок целиком. Если же треугольник непрозрачный, то он прикроет ту или иную часть отрезка, находящуюся позади него, т. е. сделает эту часть отрезка невидимой.

Выделим на рис. 107, *a* (на каждой проекции в отдельности) видимые и невидимые элементы. Начнём с вертикальной проекции. На ней прямая $r's'$ встречает прямую $a'b'$ в точке m' , которая является одновременно вертикальной проекцией двух точек: M —на стороне треугольника AB и M_1 —на прямой RS . Какая из этих точек закрыта другой при «виде спереди»?

Действуя по способу § 41 (рис. 114 на стр. 58), обнаруживаем, что видна точка M_1 на прямой RS , т. е. прямая RS находится перед стороной AB . Поэтому отрезок $r'm'$ нужно продолжить внутрь треугольника $a'b'c'$ сплошной (видимой) линией до найденной точки пересечения t' . Далее, уже по здравому смыслу мы заключаем, что часть $t'n'$ должна быть невидимой, поэтому она чертится не сплошной, а штриховой линией (рис. 107, *b*).

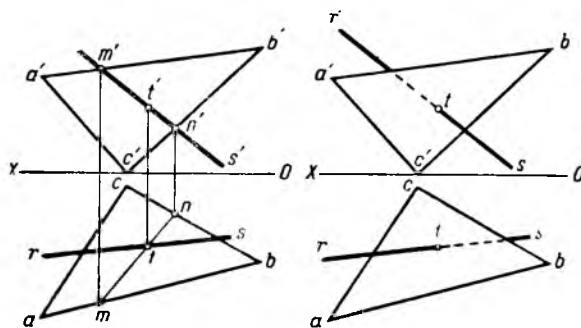


Рис. 117. Пересечение прямой с треугольной пластинкой (другой случай видимости).

Рассуждая аналогично, находим на горизонтальной проекции видимые и невидимые участки прямой RS .

На рис. 107, *b* на обеих проекциях видимые участки прямой оказались слева от точки T —точки встречи прямой с плоскостью, а невидимые—справа от этой точки. Не следует думать, что всегда участок, видимый на горизонтальной проекции, является одновременно видимым и на вертикальной проекции, а участок, невидимый на горизонтальной проекции, является невидимым и на вертикальной проекции. Мы уже убедились на примере со сломанной осью, что это не так. На рис. 117 невидимая часть вертикальной проекции отрезка находится слева от точки T , а невидимая часть горизонтальной проекции отрезка—справа от точки T .

Соблюдая условие § 31 о порядке чтения вершин многоугольника, можно упростить определение видимых элементов на второй проекции после того, как на одной из проекций они уже определены.

На рис. 107 треугольная пластинка проектируется на обе плоскости проекций одной и той же стороной. Определив на вертикальной проекции, что участок RT прямой RS находится перед стороной ACB треугольника, чертим и на горизонтальной проекции участок RT прямой перед стороной ACB треугольника.

На рисунке же 117 треугольная пластинка проектируется на плоскости H и V разными сторонами. Поэтому, установив, например, на горизонтальной проекции, что участок RT прямой RS находится перед стороной ABC пластинки, чертим его на вертикальной проекции—позади стороны ACB той же пластинки.

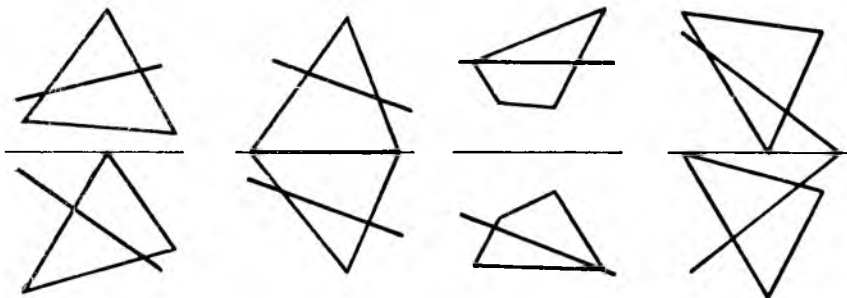


Рис. 118. Найдите точку встречи прямой с пластинкой. Выделите видимые элементы.

Упражнение. Найдите на рис. 118 точки встречи прямых с пластинками и определите их видимые и невидимые участки.

§ 43. Пересечение двух треугольных пластинок

Так как линия пересечения двух плоскостей—прямая, то линия пересечения двух ограниченных выпуклых многоугольников—отрезок прямой. Для нахождения этого отрезка достаточно найти два его конца, т. е. две точки, каждая из которых есть точка встречи контура одной фигуры с плоскостью другой фигуры.

Начнём с треугольников. Будем представлять треугольники ABC и DEF в виде материальных пластинок, например картонных.

В задаче о пересечении двух треугольников можно различать три основных случая*).

- а) Две стороны одной пластинки пересекают другую (рис. 119, а);
- б) одна сторона первой пластинки пересекает вторую пластинку; одна сторона второй пластинки пересекает первую пластинку (рис. 119, б);
- в) ни одна сторона одной пластинки не пересекает другую пластинку (рис. 119, в).

Кроме этих основных случаев, могут быть такие особые случаи:

- а) вершина одной пластинки лежит в плоскости другой пластинки (рис. 119, г);
- б) вершина одной пластинки лежит на стороне другой пластинки (рис. 119, д);
- в) сторона одной пластинки встречается со стороной другой пластинки (рис. 119, е), а также и другие случаи, не изображённые на рис. 119, которые читатель может найти сам и сделать соответствующие чертежи.

Рассмотрим теперь задачу: *построить пересечение двух треугольных пластинок, заданных на эюре* (рис. 120).

На рис. 120, а дан эюр двух треугольных пластинок, на рис. 120, б показано построение и на рис. 120, в—результат.

Проведём через сторону DE треугольника DEF вспомогательную вертикальную плоскость S . Её горизонтальный след S_h совпадает с de —горизонталь-

*) Во избежание недоразумений условимся говорить, что сторона первой пластинки пересекает или не пересекает вторую пластинку, имея в виду не плоскость второй пластинки, а саму материальную пластинку, или, выражаясь геометрически, *внутренность треугольника*. Например, на рис. 119, а сторона DE второй (заштрихованной) пластинки не пересекает первую пластинку, хотя пересекает её плоскость (вне границ треугольника ABC).

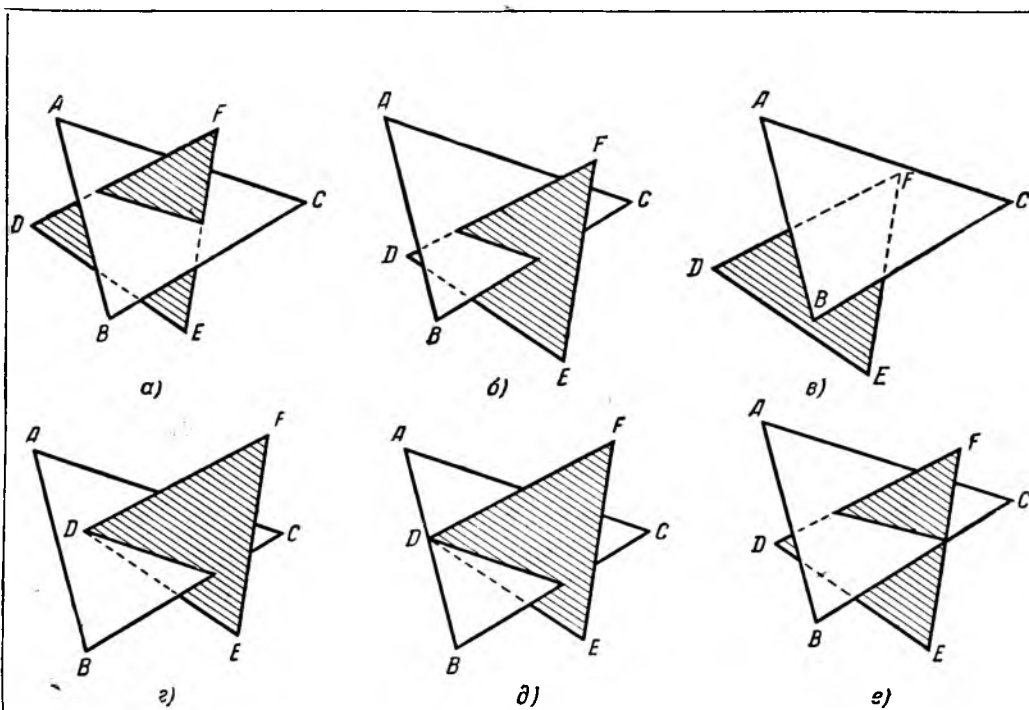


Рис. 119. Пересечение двух треугольных пластинок.

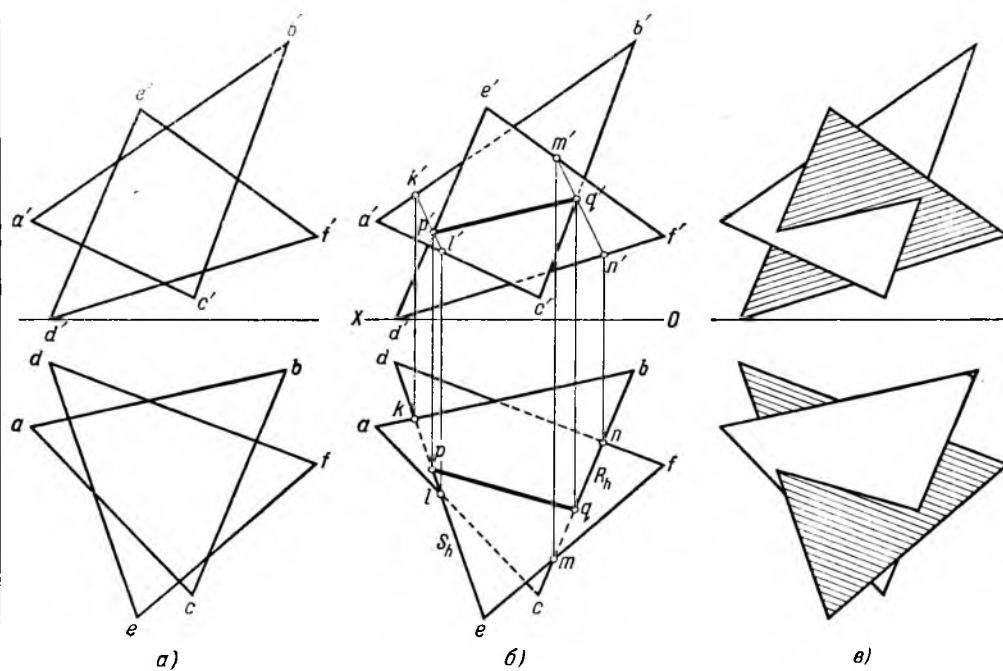


Рис. 120. Построение пересечения двух треугольных пластинок на эпюре.

ной проекцией отрезка DE . Найдём точки K и L пересечения сторон другого треугольника (ABC) с этой плоскостью S .

Соединим K с L прямой линией. Эта прямая KL лежит во вспомогательной плоскости S , проведённой нами через прямую DE ; следовательно, обе прямые DE и KL лежат в плоскости S . Эти две прямые пересекаются в точке P , вертикальная проекция которой (p') находится на пересечении $d'e'$ и $k'l'$, а горизонтальная проекция (p)—на пересечении перпендикуляра, опущенного из p' на ось OX , с kl (она же de).

Точка P лежит на стороне DE треугольника DEF и в то же время—в плоскости треугольника ABC (потому что прямая KL лежит в этой плоскости). Следовательно, точка P принадлежит обоим данным треугольникам—в этой точке сторона DE треугольника DEF встречает плоскость треугольника ABC .

Одна из точек искомой линии сечения двух треугольников найдена.

Для нахождения точки встречи стороны BC треугольника ABC с плоскостью треугольника DEF проведём через прямую BC вспомогательную вертикальную плоскость R . Рассуждения будут совершенно аналогичны. Прямая MN есть линия сечения плоскости треугольника DEF плоскостью R .

Точка Q пересечения прямой MN , лежащей в плоскости треугольника DEF , со стороной BC треугольника ABC и есть вторая точка искомой линии сечения.

Соединив Q с ранее найденной точкой P , получаем PQ —линию сечения треугольников ABC и DEF . Задача решена.

У п р а ж н е н и е. Постройте линию сечения тех же треугольников, но вспомогательные плоскости S и R проведите не перпендикулярно к H , а перпендикулярно к V . Убедитесь, что результат получится тот же самый.

З а м е ч а н и е. При решении этой задачи мы начали с отыскания точки встречи стороны DE треугольника DEF с плоскостью ABC , а затем отыскивали точку встречи стороны BC треугольника ABC с плоскостью DEF .

Но ведь мы могли начать с отыскания пересечения сторон DF или EF треугольника DEF с плоскостью ABC , а также сторон AB и AC треугольника ABC с плоскостью DEF , и тогда должны были бы получить четыре новые точки пересечения. Где же эти точки?

Если бы мы произвели построение точки пересечения стороны DF с плоскостью треугольника ABC способом, изложенным выше, то убедились бы, что точка пересечения оказывается вне треугольника ABC ; с самой же пластинкой ABC сторона DF не пересекается вовсе. Не встречаются и стороны EF с пластинкой ABC , а также и стороны AB и AC с треугольником DEF ; пересечения происходят вне треугольников и, таким образом, из шести прямых только две дают точки пересечения P и Q .

При некотором навыке в решении подобных задач можно избежать напрасных поисков.

У п р а ж н е н и е. Постройте линии сечения двух пар треугольников, данных на рис. 121.

Вернёмся к рисунку 120 и определим видимые и невидимые элементы. Наружный контур изображения—весь видимый. Рассматривая на эюре пересечение вертикальных проекций двух прямых (краёв одной и другой пластинок), мы определяем каждый раз, какая из этих прямых заслоняет другую на этой проекции. То же самое делаем и на другой проекции.

Возьмём, например, отрезки $a'b'$ и $d'e'$ на рис. 120, б. Проведя из точки пересечения этих отрезков перпендикуляр к оси проекций и продолжив его,

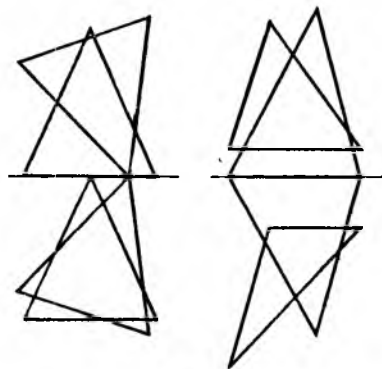


Рис. 121. Постройте пересечение треугольных пластинок.

мы видим, что этот перпендикуляр встречает сначала ab , а затем de . Значит при рассматривании спереди сторона DE заслоняет AB . Аналогично можно определить видимость во всех точках пересечения краёв наших пластинок. Но можно упростить нахождение видимости в других точках пересечения, если учесть, что при переходе через линию пересечения пластинок (PQ) край одной пластинки проходит сквозь другую пластинку и переходит с видимой стороны на невидимую, а с невидимой—на видимую. Таким способом и получен рис. 120, в.

Напомним, что части, видимые при проектировании на одну из плоскостей проекций, при проектировании на другую плоскость проекций могут быть в одних случаях видимыми, а в других—невидимыми.

У п р а ж н е н и е. Начертите сами две проекции двух произвольных треугольников ABC и DEF . Постройте линию пересечения этих треугольников и выделите видимые элементы.

Рассмотрим ещё такую задачу. *Построить линию пересечения двух плоскостей, заданных треугольниками ABC и DEF (рис. 122).*

Эта задача существенно отличается от предыдущей: там требовалось найти пересечение самих треугольных пластинок, а здесь—пересечение плоскостей этих пластинок. Пластинки, изображённые на рис. 122, не пересекаются, а их плоскости пересекаются.

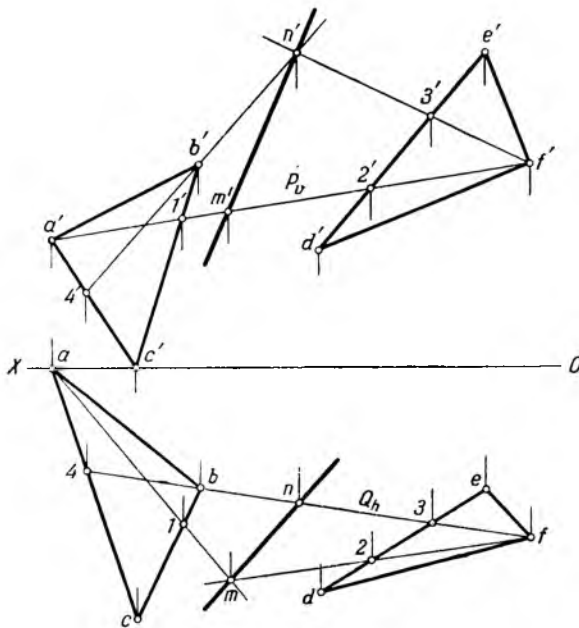


Рис. 122. Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных треугольными пластинками.

Для построения прямой, которая лежит одновременно в обеих плоскостях, проведём вспомогательную вертикально-проектирующую плоскость P ; для упрощения построений проведём P_v через a' и f' . Плоскость P пересечёт наши треугольники: треугольник ABC по $A-1$, треугольник DEF по $F-2$; прямые $A-1$ и $F-2$ лежат в одной плоскости—в плоскости P ; точка M —точка их пересечения; так как $A-1$ лежит в плоскости одного из данных треугольников, а $F-2$ в плоскости другого треугольника, точка M и есть одна из точек на искомой линии сечения заданных треугольников.

Аналогично находим вторую точку—точку N (проследите сами по чертежу, как именно это сделано). MN —искомая линия сечения плоскостей, заданных треугольниками ABC и DEF .

§ 44. Перпендикулярность прямой и плоскости

Переходим к рассмотрению важного частного случая пересекающихся прямой и плоскости: случая, когда прямая перпендикулярна к плоскости.

Пусть прямая AB перпендикулярна к плоскости P (рис. 123). Проведём через прямую AB вспомогательную горизонтально-проектирующую плоскость Q . Но всякая плоскость, проходящая через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, перпендикулярна к этой плоскости, следовательно, $Q \perp P$.

След P_h лежит в плоскостях P и H как линия пересечения этих плоскостей; но обе эти плоскости— P и H —перпендикулярны к плоскости Q ; поэтому прямая их пересечения, т. е. след P_h , перпендикулярна к плоскости Q и ко всякой прямой, лежащей в плоскости Q .

Горизонтальная проекция ab прямой AB —это линия пересечения Q и H ; следовательно, ab перпендикулярна к P_h .

Таким образом, мы получаем важный результат: *горизонтальная проекция прямой, перпендикулярной к плоскости, перпендикулярна к горизонтальному следу этой плоскости.*

Разумеется, аналогичное положение относится и к вертикальному следу и вертикальной проекции прямой, перпендикулярной к плоскости.

На рис. 124 дан эллипс прямой AB , перпендикулярной к плоскости P .

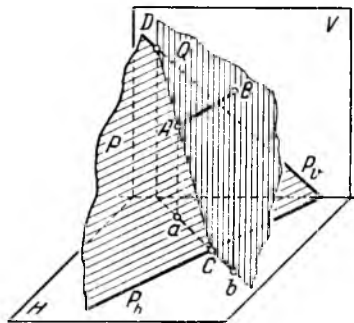


Рис. 123. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то её горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальному следу плоскости.

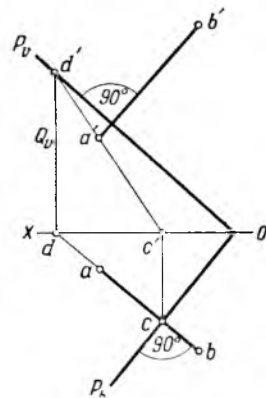


Рис. 124. Прямая, перпендикулярная к плоскости.

§ 45. Некоторые сведения из геометрии

Обратим внимание читателя на следующие важные геометрические факты:

1) *Через каждую точку пространства можно провести любое число горизонтальных прямых, но лишь одну—вертикальную* (рис. 125, а).

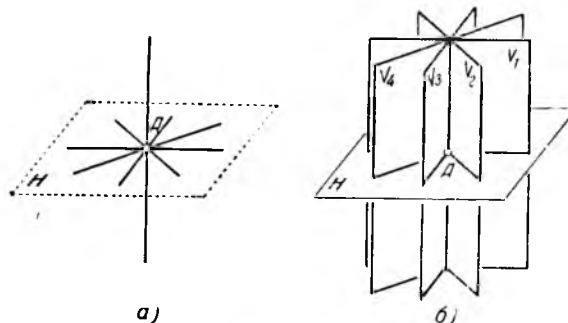


Рис. 125. Сколько горизонтальных и вертикальных плоскостей и прямых можно провести через точку A ?

2) *Через каждую точку пространства можно провести любое число вертикальных плоскостей, но лишь одну—горизонтальную* (рис. 125, б).

Вспомним также следующие теоремы стереометрии:

1) Прямая AB , образующая прямые углы с двумя прямыми, проведёнными в плоскости P , перпендикулярна и к любой прямой, проведённой в плоскости P . Такая прямая AB называется прямой, перпендикулярной к плоскости P .

2) Если две плоскости перпендикулярны к третьей, то и прямая пересечения этих плоскостей перпендикулярна к третьей плоскости.

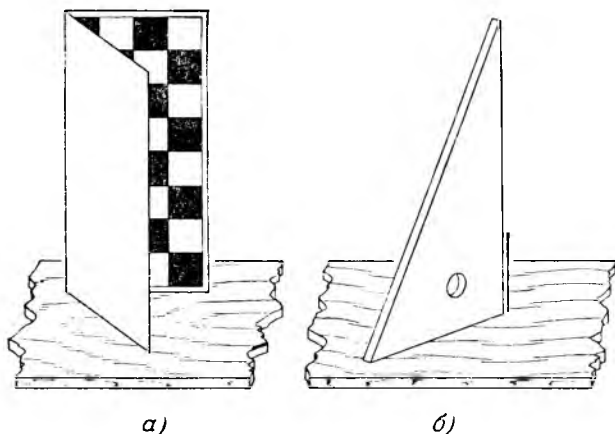


Рис. 126. Какую геометрическую теорему иллюстрирует каждый из этих рисунков?

Прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций*) (например, прямая AB на рис. 127), называется горизонталью данной плоскости.

Горизонталь имеет свойства, очевидные из рис. 127:

1) горизонталь имеет только один след, а именно—вертикальный;

2) горизонталь параллельна горизонтальному следу плоскости; в частности, сам горизонтальный след плоскости—одна из горизонталей;

3) горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости;

4) вертикальная проекция горизонтали параллельна оси проекций.

Прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная вертикальной плоскости проекций (например, прямая CD на рис. 128), называется фронталю данной плоскости.

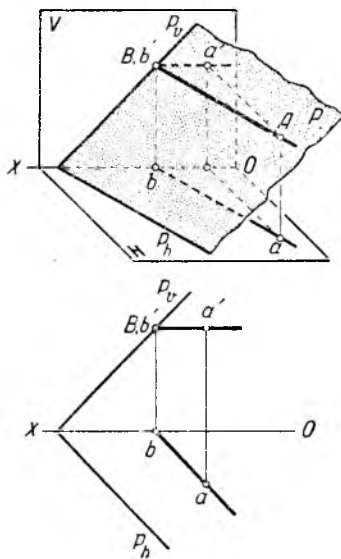


Рис. 127. AB —горизонталь плоскости P .

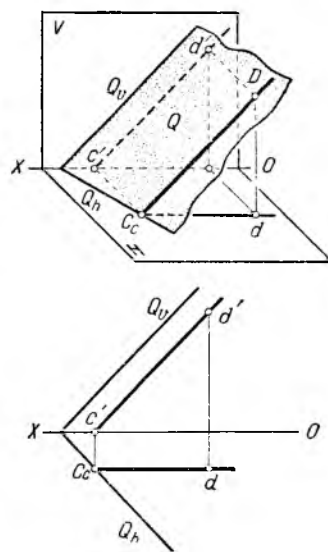


Рис. 128. CD —фронталь плоскости Q .

*) И, следовательно, параллельная любой горизонтальной плоскости.

- Фронталь имеет следующие свойства, аналогичные свойствам горизонтали:
- 1) фронталь имеет только один след, а именно—горизонтальный;
 - 2) фронталь параллельна вертикальному следу плоскости; в частности, сам вертикальный след плоскости—одна из фронталей;
 - 3) вертикальная проекция фронтали параллельна вертикальному следу плоскости;
 - 4) горизонтальная проекция фронтали параллельна оси проекций.

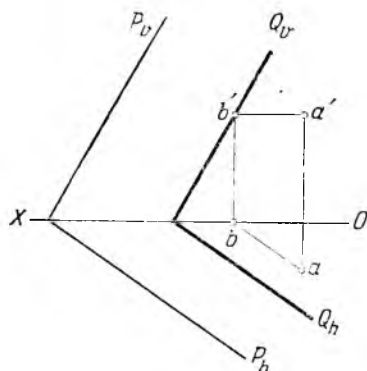


Рис. 129. Решение задачи при помощи горизонтали.

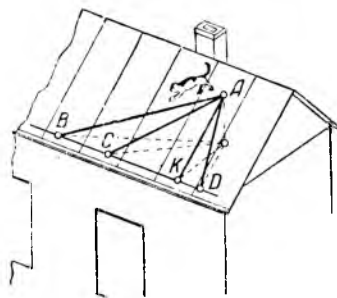


Рис. 130. АК—линия наибольшего ската плоскости крыши.

У п р а ж н е н и я. 1. Покажите горизонтالي и фронтали различных плоскостей на рис. 101 («На улице»).

2. У каких плоскостей горизонтали совпадают с фронталями?
3. У каких плоскостей всякая прямая—фронталь? У каких плоскостей всякая прямая—горизонталь?

При помощи фронталей или горизонталей решается много задач, в частности, задача: через данную точку A провести плоскость Q , параллельную данной плоскости P (рис. 129)*. Так как плоскости P и Q должны быть взаимно параллельны, то и их одноимённые следы также взаимно параллельны; следовательно, и п р а в л е н и я обоих следов плоскости Q нам известны; поэтому мы проводим через данную точку A горизонталь плоскости Q (т. е. проводим $ab \parallel P_h$ и $a'b' \parallel OX$); найдя точку b' —вертикальный след прямой AB , строим следы искомой плоскости $Q_v \parallel P_v$ и $Q_h \parallel P_h$.

У п р а ж н е н и е. Решите эту же задачу при помощи фронталей плоскости Q .

Познакомимся ещё с одним важным типом прямых линий, лежащих в данной плоскости,—*линиями наибольшего ската*.

Кошка может пройти к жёлобу, подвешенному к нижнему горизонтальному краю крыши, различными путями; если ограничиться только прямыми линиями, то кошка может выбрать прямую AB , или AC , или AD и т. д. (рис. 130). Но дождевая капля, оказавшись в той же точке A , покатится к жёлобу по пути AK , перпендикулярному к горизонтали BD , потому что этот путь—самый крутой, т. е. образует самый большой угол с горизонтальной плоскостью. Поэтому прямая AK называется *линией наибольшего ската плоскости*.

Линии наибольшего ската плоскости—прямые, лежащие в этой плоскости и перпендикулярные к её горизонталям (в том числе и к горизонтальному следу этой плоскости).

Гребни стальных листов кровли направлены по линиям наибольшего ската.

*) Частные случаи этой задачи были рассмотрены в § 34.

Решим следующую задачу. Плоскость P дана следами (рис. 131); требуется провести линию наибольшего ската через точку A этой плоскости, если известна только её горизонтальная проекция a .

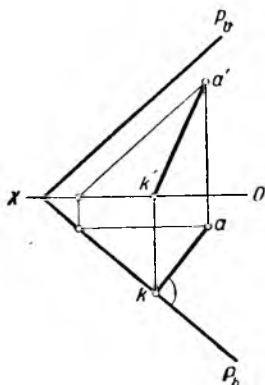


Рис. 131. Построение линии наибольшего ската на эпюре.

Находим при помощи фронтали вертикальную проекцию a' точки A . Искомая линия наибольшего ската AK перпендикулярна к следу P_h ; поэтому проводим $ak \perp P_h$; затем находим k' и соединяем a' с k' .

Линия наибольшего ската AK и её горизонтальная проекция ak определяют плоский угол AKa , являющийся мерой двугранного угла, образованного плоскостями P и H . Этот угол и есть угол наклона плоскости P к плоскости H .

§ 47. Проекция прямого угла

Пусть плоскость Q перпендикулярна к плоскости проекций P , а прямая AB перпендикулярна к плоскости Q (рис. 132). В таком случае прямая AB параллельна плоскости проекций, а её проекция ab перпендикулярна к линии ac пересечения плоскостей P и Q . Любой луч, проведенный в плоскости Q из точки A (например, AC_1, AC_2, AC_3, \dots): 1) образует с AB прямой угол, 2) проектируется на плоскость P в виде прямой ac ; следовательно:

Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, то проекция этого прямого угла — тоже прямой угол.

Справедлива и обратная теорема: *если проекция прямого угла — прямой угол, то хотя бы одна из сторон прямого угла-оригинала параллельна плоскости проекций.*

Если же ни одна из двух сторон прямого угла не параллельна плоскости проекций, то проекция этого угла не может быть прямым углом)* (рис. 133).

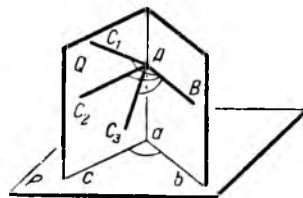


Рис. 132. Проекция прямого угла, одна из сторон которого параллельна плоскости проекций.

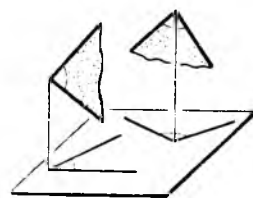


Рис. 133. Проекция прямого угла, ни одна из сторон которого не параллельна плоскости проекций.

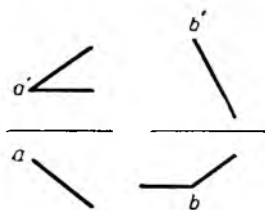


Рис. 134. Достройте проекции этих прямых углов.

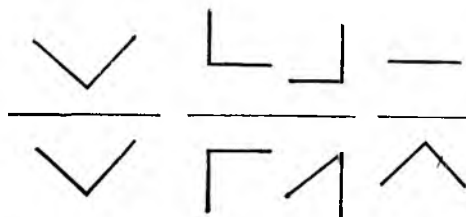


Рис. 135. Какие из этих углов-оригиналов — прямые?

Упражнения. 1. Углы A и B (рис. 134)—прямые: дочертите вторые проекции. 2. На рис. 135 даны эпюры нескольких углов. Какие из углов-оригиналов прямые?

*) Для острых и тупых углов дело обстоит сложнее. Разумеется, если обе стороны угла параллельны плоскости проекций (т. е. если его плоскость параллельна плоскости проекций), то проекция этого угла равна самому углу. Однако равенство угла-оригинала и его проекции может иметь место не только в этом случае. Проекция может быть равна оригиналу, хотя бы ни одна из сторон угла-оригинала не была параллельна плоскости проекций. Мы не будем здесь рассматривать подробно этот вопрос для острых и тупых углов.

§ 48. Проекция окружности

При проектировании *о к р у ж н о с т и* могут иметь место три случая:

1) Плоскость окружности параллельна плоскости проекций; в этом случае окружность проектируется без искажения (рис. 136, *а*).

2) Плоскость окружности перпендикулярна к плоскости проекций; в этом случае проекцией окружности является отрезок, равный диаметру окружности (рис. 136, *д*).

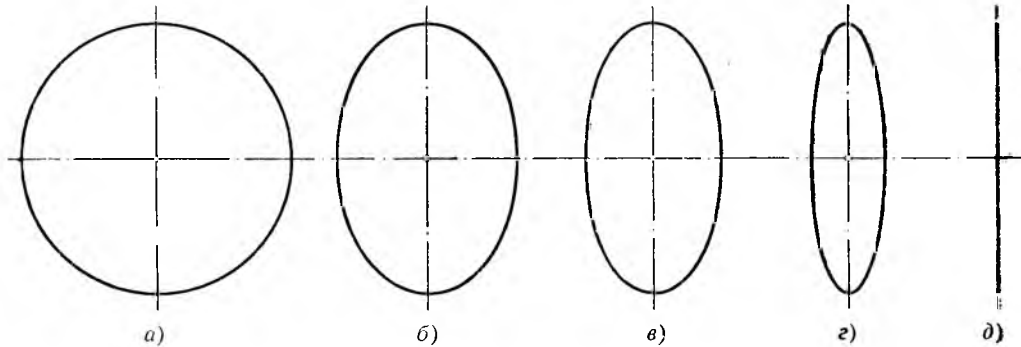


Рис. 136. Проекция окружности.

3) Плоскость окружности наклонна по отношению к плоскости проекций; в этом случае проекцией окружности является некоторая замкнутая кривая. Её называют *эллисом* (рис. 136, *б*, *в*, *г*).

Эллис—проекцию окружности—удобнее всего вычерчивать при помощи проекции квадрата, описанного около данной окружности.

Рассмотрим вписанную в квадрат окружность (рис. 137).

Окружность касается сторон квадрата в четырёх точках *E*, *F*, *G* и *H*, являющихся серединами его сторон.

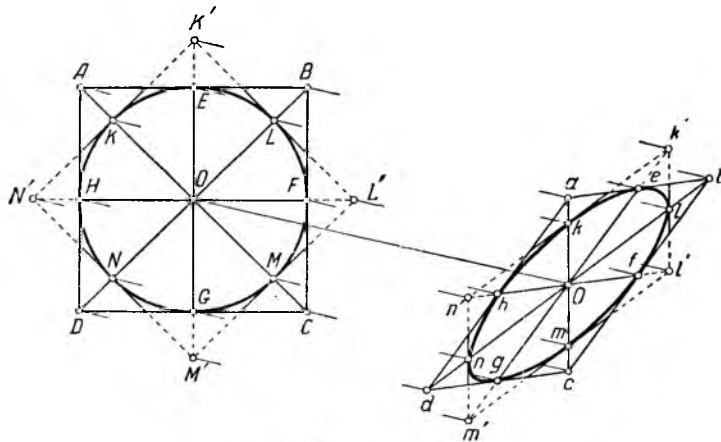


Рис. 137. Построение эллипса.

Квадрат при параллельном проектировании проектируется в параллелограм, а вписанная в квадрат окружность проектируется в эллипс, который касается сторон параллелограмма в их серединах.

Окружность пересекает диагонали квадрата в четырёх точках *K*, *L*, *M* и *N*

$$KO = LO = MO = NO = \frac{a}{2}$$

(a — длина стороны квадрата). Так как

$$OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

то

$$\frac{KO}{AO} = \frac{LO}{BO} = \frac{MO}{CO} = \frac{NO}{DO} = \frac{a \cdot 2}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

Эти отношения сохраняются при всяком параллельном проектировании; следовательно, проекции точек K , L , M и N легко найти, отложив от проекции центра O квадрата на диагоналях параллелограмма по 0,7 половины длины проекции соответствующей диагонали.

Касательные KK' , LL' , MM' и NN' параллельны соответствующим диагоналям квадрата. Эта параллельность сохраняется при параллельном проектировании. Поэтому на проекции через точки k и m проводим прямые, параллельные диагонали db , и через точки l и n — прямые, параллельные диагонали ac ; получим касательные к эллипсу.

Полученный на проекции восьмиугольник вполне достаточен для построения вписанного в него эллипса путём соединения плавной кривой восьми точек: k , e , l , f , m , g , n и h .

ГЛАВА VI

ЭПЮРЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

§ 49. Проекции пирамиды

На рис. 138 даны две проекции правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, стоящей на плоскости H ; основание пирамиды—квадрат $ABCD$ —лежит в горизонтальной плоскости проекций; рёбра пирамиды—отрезки SA , SB , SC и SD ; боковые грани пирамиды—треугольники ASB , BSC , CSD и DSA .

Горизонтальная проекция представляет собой квадрат $abcd$, диагонали ac и bd которого—проекции боковых рёбер пирамиды, а центр s —проекция вершины S пирамиды.

Вид вертикальной проекции этой пирамиды зависит от углов между сторонами квадрата $abcd$ и осью OX . Вертикальные проекции a' , b' , c' и d' вершин основания располагаются на оси OX , занимая указанные на чертеже положения; соединив эти четыре проекции с проекцией s' вершины пирамиды, получим вертикальные проекции $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$ и $s'd'$ четырёх боковых рёбер пирамиды.

Некоторые из этих боковых рёбер могут быть невидимыми (мы считаем пирамиду непрозрачной) и должны быть изображены пунктирными линиями. Смотря на нашу пирамиду сверху, мы видим все её рёбра; смотря же на неё спереди, мы не видим ребра SB . Поэтому на горизонтальной проекции все рёбра изображены сплошными линиями, а на вертикальной проекции ребро $s'b'$ изображено штриховой линией.

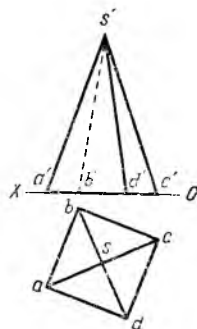


Рис. 138. Эпюр правильной четырёхугольной пирамиды, стоящей на плоскости H .

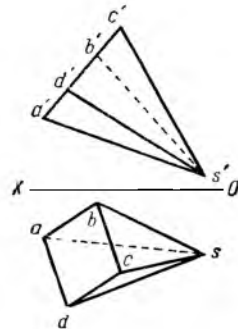


Рис. 139. Эпюр правильной четырёхугольной пирамиды, основание которой расположено перпендикулярно к плоскости V .

На рис. 139 та же пирамида занимает иное положение; её основание $ABCD$ попрежнему перпендикулярно к плоскости V , но наклонно по отношению к плоскости H .

В определении видимых и невидимых элементов этой пирамиды читатель разберётся сам. Прежде всего нужно иметь в виду, что *рёбра, образующие контур данной проекции,—всегда видимые*, так как их ничто не заслоняет.

У п р а ж н е н и я. 1. Вычертить две проекции правильной четырёхугольной пирамиды, стоящей на H так, чтобы сторона AB квадрата основания была: а) параллельна оси OX ; б) расположена под углом 45° к оси OX .

2. Построить профильные проекции пирамиды, изображённой на рис. 138, и двух пирамид, полученных в предыдущей задаче.

В обоих упражнениях выделить видимые и невидимые элементы.

§ 50. Другие примеры изображения тел

На рис. 140 изображены проекции некоторых геометрических тел.

На рис. 140, а даны проекции прямого кругового конуса, стоящего на плоскости H . Горизонтальная проекция—круг, центр которого—проекция вершины S . Вертикальная проекция—равнобедренный треугольник, основание которого равно диаметру основания конуса, а боковые стороны равны образующей конуса.

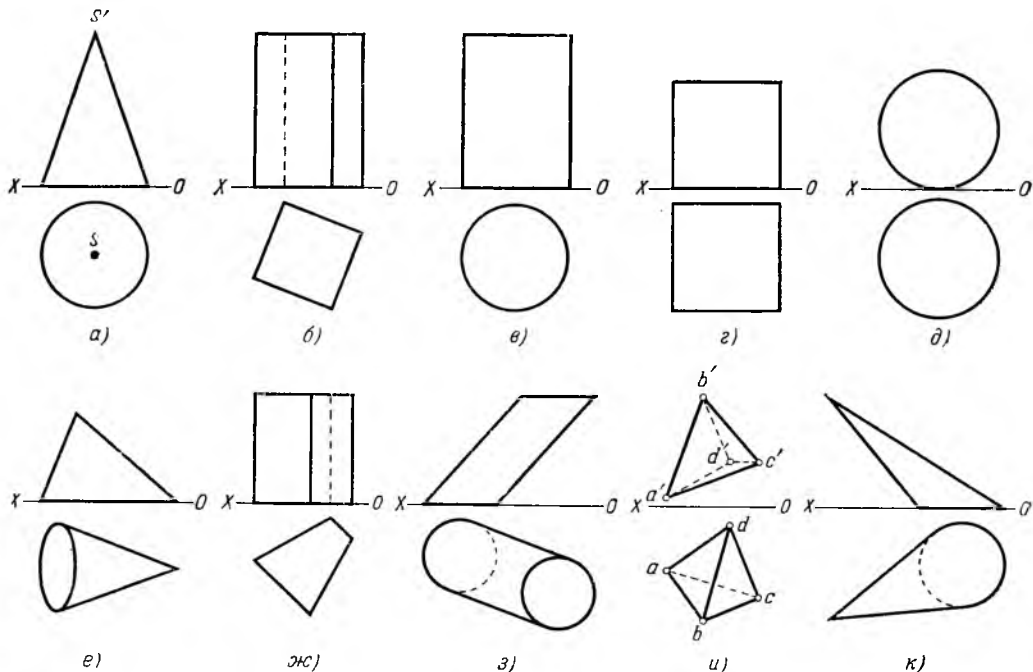


Рис. 140. Эпюры геометрических тел: а) прямой круговой конус; б) правильная четырёхугольная призма; в) прямой круговой цилиндр; г) куб; д) шар; е) конус, лежащий на плоскости H ; ж) наклонный круговой цилиндр; и) треугольная пирамида; к) наклонный круговой конус.

На рис. 140, б даны проекции правильной четырёхугольной призмы, стоящей на плоскости H . Горизонтальные проекции обоих оснований—один и тот же квадрат; горизонтальные проекции боковых рёбер превращаются в точки—вершины этого квадрата. На вертикальную плоскость проекций все четыре боковых ребра проектируются без искажения, так как они параллельны плоскости V ; одно из них невидимо—поэтому оно вычерчено штриховой линией.

На рис. 140, в даны проекции прямого кругового цилиндра; на рис. 140, г—проекция куба, стоящего на плоскости H (при этом две грани куба параллельны плоскости V); на рис. 140, д—проекция шара, лежащего на плоскости H . На рис. 140, е изображён прямой круговой конус, лежащий на плоскости H ; его боковая поверхность касается плоскости H , а высота параллельна плоскости V . На рис. 140, ж изображена неправильная прямая четырёхугольная призма, стоящая на плоскости H ; на рис. 140, з—наклонный круговой цилиндр, стоящий на плоскости H ; на рис. 140, и—треугольная пирамида произвольной формы, занимающая случайное положение; наконец, на рис. 140, к—наклонный круговой конус.

Определим видимые и невидимые элементы на обеих проекциях пирамиды $ABCD$, изображённой на рис. 140, и. Начнём с горизонтальной проекции. Какое из двух рёбер AC и BD видимое? То, которое находится выше. Какое же из них выше? На этот вопрос вертикальная проекция сразу

даёт ответ: ребро BD выше ребра AC . Поэтому мы чертим ac штриховой, а bd —сплошной линией. Переходим к вертикальной проекции. Здесь вопрос стоит несколько иначе: что находится впереди—точка D или плоскость ABC ? Для ответа обращаемся к горизонтальной проекции, на которой ясно видно, что грань ABC пирамиды находится впереди вершины D . Поэтому на вертикальной проекции точка D невидимая; следовательно, невидимы и ребра DA, DB, DC ; их вертикальные проекции $d'a', d'b', d'c'$ вычерчены поэтому штриховой линией.

У п р а ж н е н и я. 1. Пометить буквами (a и a' , b и b' и т. д.) восемь вершин призмы, изображённой на рис. 140, б, и куба на рис. 140, г.

2. Построить третью проекцию каждого из тел, изображённых на рис. 140, и выделить видимые и невидимые элементы.

§ 51. Различные положения куба

На рис. 141 один и тот же куб дан в шести различных положениях относительно плоскостей проекций:

а) куб стоит на плоскости H так, что одна его грань (1—2—6—5) примыкает к плоскости V ;

б) куб стоит на плоскости H , занимая случайное положение;

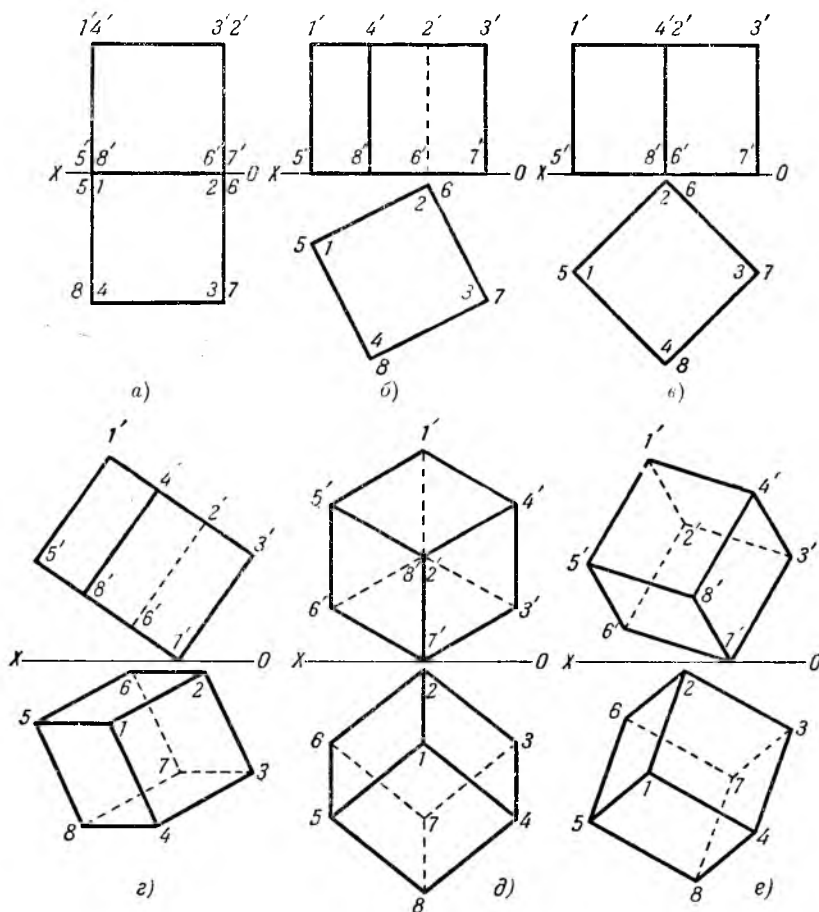


Рис. 141. Эпюры куба в различных положениях.

в) куб стоит на плоскости H так, что одна из диагоналей его основания (какая?) параллельна плоскости V ; следовательно, вторая диагональ основания перпендикулярна V ;

г) грань $1-2-3-4$ куба перпендикулярна к плоскости V , но не параллельна плоскости H ;

д) одна из диагоналей куба (какая?) перпендикулярна V ;

е) куб занимает произвольное положение.

У п р а ж н е н и я. 1. Построить третьи проекции куба для всех шести положений а)–е) на рис. 141.

2. На рис. 142 изображён (в двух проекциях) многогранник—додикаэдр (по-гречески—двенадцатигранник). Обозначить цифрами все его 20 вершин; построить третью проекцию.

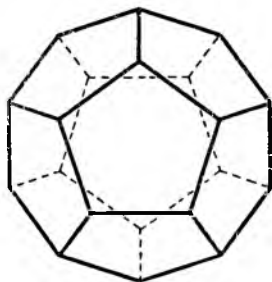
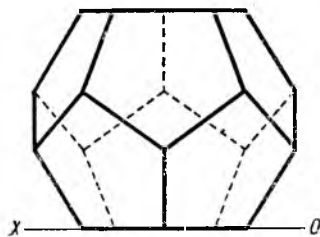


Рис. 142. Эпюр додекаэдра.

§ 52. Двух проекций иногда недостаточно

На рис. 143, а даны проекции двух одинаковых прямоугольных параллелепипедов. У каждого из них два измерения одинаковы (т. е. эти параллелепипеды имеют квадратные основания) и равны половине третьего; один из них лежит, а другой стоит на плоскости, параллельной H (рис. 143, б).

Ответьте теперь на следующий вопрос: что представляют собою и как расположены в пространстве два тела, изображённые на эпюре (рис. 144, а)? Вы, вероятно, без труда сообразите, что это—два таких же параллелепипеда, как на рис. 143, но иначе поставленные: один лежит на другом (рис. 144, б).

Но это—не единственный ответ. Тот же эпюр—рис. 144, а—может изображать параллелепипед и куб, расположенные так, что они касаются друг

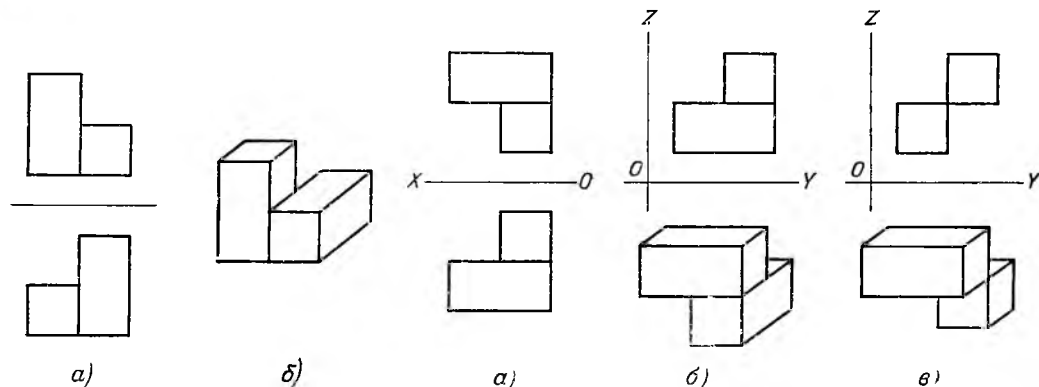


Рис. 143. Два параллелепипеда: а) эпюр; б) рисунок.

Рис. 144. Какие тела изображены на эпюре а)? Рисунки б) и в) дают два ответа на этот вопрос.

друга по ребру (рис. 144, в). Третьи проекции этих тел на плоскость W даны над соответствующими изображениями *).

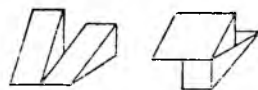


Рис. 145.

*) Если не ограничиваться параллелепипедами, то заданные две проекции могут изображать и другие тела, например два клина (рис. 145).

Этот пример показывает, что в некоторых случаях даже двух проекций оказывается недостаточно для полной ясности—необходимо дать ещё и третью проекцию. На рис. 146 даны две проекции, очень похожие на рис. 143 и 144. Однако этот эпор неверен—он не изображает никаких тел.

Чтение чертежа состоит в том, чтобы по двум или трём проекциям тела точно представить себе его форму, размеры и положение. Подобно тому, как при обучении грамоте сначала чтение идёт «по складам», а позже—бегло, чтение чертежей также по мере приобретения навыков становится всё более быстрым; для приобретения этих навыков следует проделывать упражнения в разборе (чтении) чертежей.

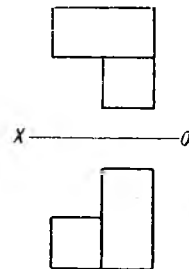


Рис. 146. Неверный эпор. Никакие тела не могут иметь таких проекций.

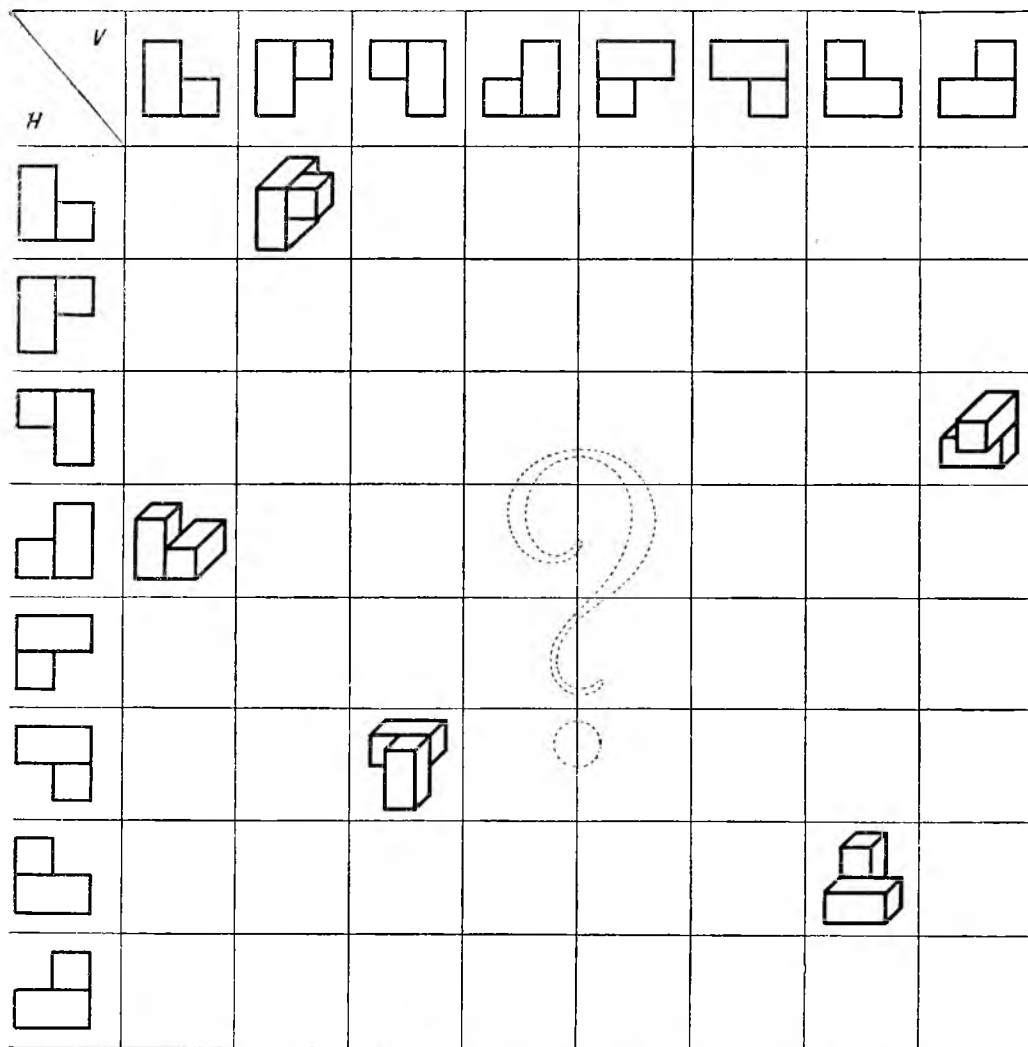


Рис. 147. Определить форму и расположение тел по этим 64 эписрам.

Рис. 147 представляет собою таблицу из восьми разных горизонтальных и восьми разных вертикальных проекций; всего, следовательно, на этом рисунке

изображено 64 различных эпюра. Для четырёх эпюров даны решения. Проверьте своё умение бегло читать простые чертежи: заполните остальные клетки. Для одних эпюров получаются три решения, для других — одно или два, а для некоторых — вообще ни одного (т. е. такие эпюры невозможны *).

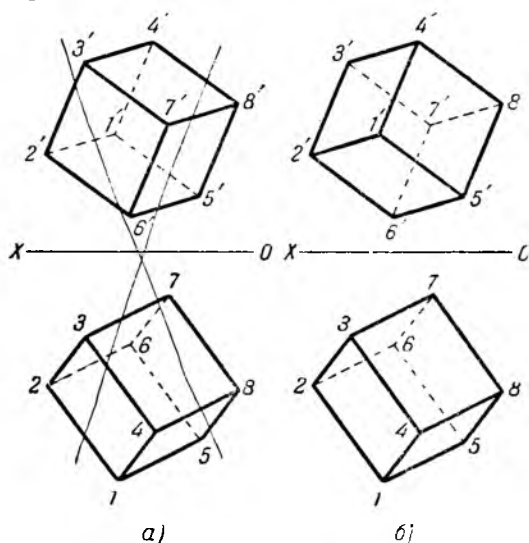


Рис. 148. Видимые и невидимые рёбра куба: а) неверный чертёж; б) верный чертёж.

при сравнении двух проекций любой из прочих пяти граней (например, $5-8-4-1$ и $5'-1'-4'-8'$ и т. д.). На рис. 148, б сплошные и штриховые линии нанесены верно.

Приведём ещё пример. Вернёмся к рис. 138. На горизонтальной проекции этого эпюра читаем против часовой стрелки видимый треугольник dsa . На вертикальной проекции этот треугольник тоже читается (против часовой стрелки) $d's'a'$; следовательно, он и на этой проекции видимый; поэтому мы чертим $s'd'$ сплошной линией.

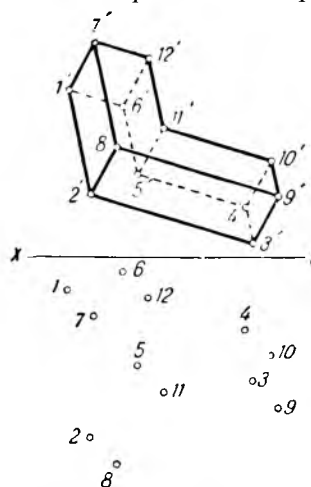


Рис. 149. Вычертите горизонтальную проекцию этого многогранника.

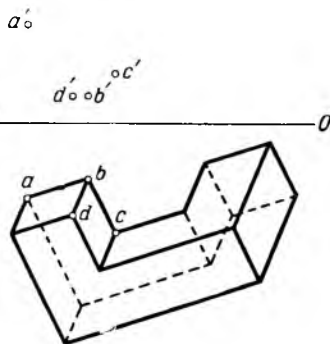


Рис. 150. Постройте вертикальную проекцию многогранника.

многогранника, имеющего 16 вершин, и вертикальные проекции только четырёх его вершин (рис. 150); известно, что рёбра тела соответственно параллельны трём прямым. Постройте вертикальную проекцию. Постройте профильную проекцию. Укажите видимые и невидимые рёбра.

*) Попробуйте решить эту же задачу в предположении, что изображённые тела — не параллелепипеды, а клинья (как на рис. 145) или круглые тела. Задача стала несколько труднее.

§ 53. Применение метода «сторон пластинок»

На рис. 148 даны две проекции куба. Нетрудно убедиться, что на рис. 148, а сплошные и штриховые линии нанесены неверно. Рассмотрим, например, ту грань куба, которая проходит через вершины 2 и 4. На горизонтальной проекции мы прочитаем её так: $1-4-3-2$ (§ 34), а на вертикальной проекции (глядя на куб с внешней стороны) — $1'-2'-3'-4'$, т. е. в обратном порядке. Этого быть не может! Ошибка выявилась бы также

У п р а ж н е н и я.
1. Дана вертикальная проекция многогранника и горизонтальные проекции его двенадцати вершин (рис. 149). Постройте его горизонтальную проекцию. Закрасьте на обеих проекциях грань $1-2-8-7$ синим цветом, другую грань — красным и т. д. Проверьте на обеих проекциях, что все восемь граней читаются одинаково. Постройте третью проекцию и выделите на ней видимые и невидимые элементы.

2. Даны: горизонтальная проекция мно-

ГЛАВА VII

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕРХНОСТЯХ И ЛИНИЯХ

§ 54. Конические и цилиндрические поверхности

На рис. 151, *а* изображены «гигантские шаги». В петли на нижних концах канатов усаживаются ребята и, отталкиваясь ногами от земли, несутся друг за другом вокруг столба. Проследим за одним из канатов; он представляет

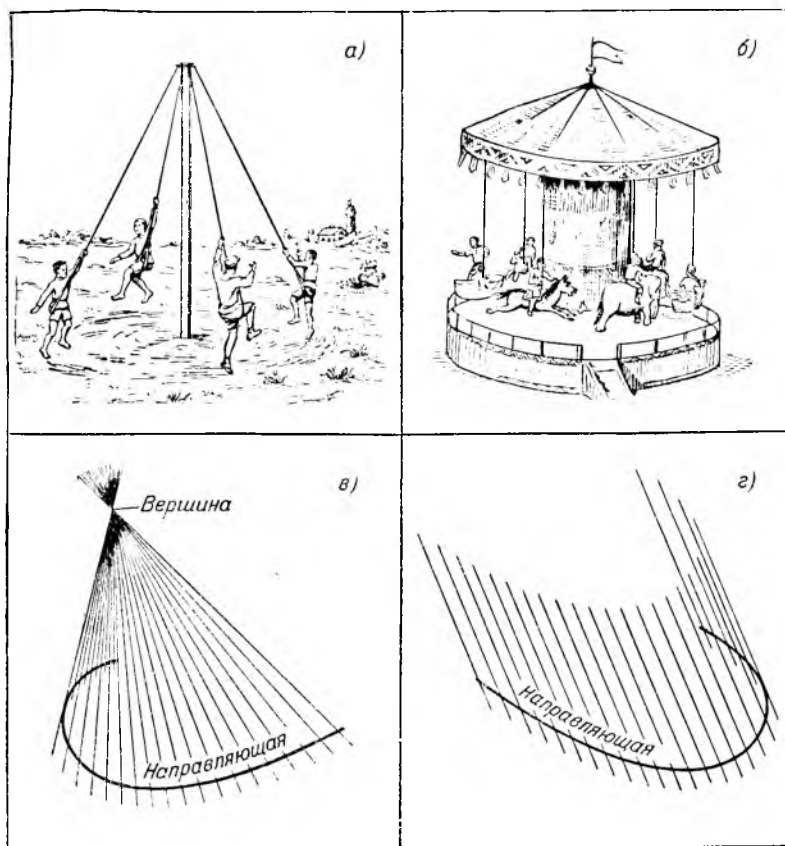


Рис. 151. *а*) Гигантские шаги; *б*) карусель; *в*) коническая поверхность (конус); *г*) цилиндрическая поверхность (цилиндр).

тобой отрезок прямой; при этом один конец его всегда проходит через одну неподвижную точку—вершину столба. Каждый канат гигантских шагов описывает поверхность, которая называется *конической*.

На рис. 151, б изображена карусель. Каждая подвеска этой карусели—прямая линия, движущаяся параллельно самой себе; она описывает при этом движение поверхность, которая называется *цилиндрической*.

Коническая поверхность, или *конус**) (рис. 151, в), образуется движением прямой линии (образующей), проходящей через одну неподвижную точку (вершину). Любая линия, лежащая на конической поверхности и пересекающая все образующие конуса по одному разу, называется *направляющей*. Задание вершины конуса и какой-нибудь его направляющей вполне определяет конус. Направляющей конической поверхности может служить любая линия (не проходящая через вершину).

Коническая поверхность состоит из двух полостей, так как каждая образующая продолжается бесконечно в обе стороны.

Цилиндрическая поверхность, или *цилиндр***) (рис. 151, г), образуется движением прямой линии (образующей), перемещающейся параллельно самой себе. У цилиндра тоже есть *направляющие* (определяются так же, как и для конуса).

Цилиндрическая поверхность простирается бесконечно в обе стороны.

§ 55. Поверхности вращения и тела вращения

Пусть произвольная плоская линия AB вращается вокруг неподвижной прямой MN , лежащей в той же плоскости (рис. 152). В таком случае каждая точка линии AB описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к MN , а центр лежит на MN . Вся линия AB опишет поверхность, которая называется *поверхностью вращения*. Линия AB называется *меридианом* этой поверхности, а прямая MN —*осью* поверхности.

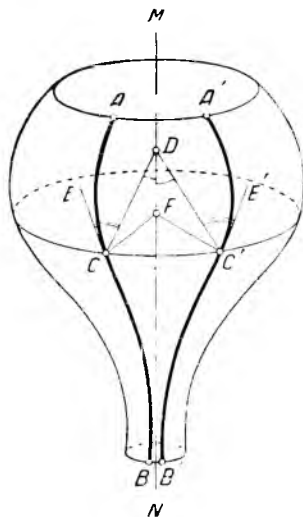


Рис. 152. Образование поверхности вращения.

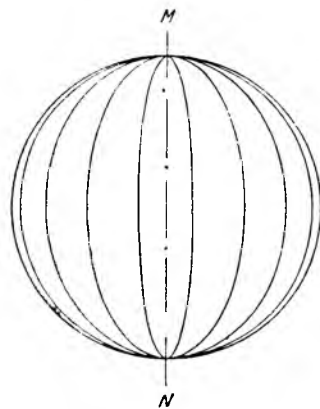


Рис. 153. Сфера (вид сбоку).

Очевидно, что плоскость, перпендикулярная к оси вращения, пересекает поверхность вращения всегда по окружности. Такую окружность называют *параллелью*. (Вспомните меридианы и параллели на глобусе!)

Если поверхность вращения задана, то любая плоскость, проведенная через ось вращения, пересечёт поверхность вращения по двум меридианам, взаимно симметричным относительно оси.

Если меридиан—прямая линия, параллельная оси, то получающаяся поверхность вращения—*круговой цилиндр*.

*) *Конусом* называют как поверхность, так и тело, образуемое ею и секущей плоскостью. Читатель легко определит в каждом отдельном случае—идёт ли речь о теле, или о поверхности.

**) Таким образом, слово «цилиндр», как и слово «конус», имеет два значения.

Если меридиан—прямая линия, пересекающая ось вращения, то поверхность вращения—*круговой конус*.

Если меридиан—полуокружность, диаметр которой лежит на оси вращения, то поверхность вращения—*сфера* (рис. 153).

При вращении эллипса вокруг любой из двух его осей симметрии получается *эллипсоид вращения*. В зависимости от того, вокруг какой оси симметрии происходило вращение—вокруг большой или малой,—получаем соответственно *вытянутый* или *сжатый эллипсоиды вращения* (рис. 154, а и б) (конечно, для получения эллипсоида вращения нет необходимости вращать весь эллипс, достаточно вращать любую из двух его симметричных половин).

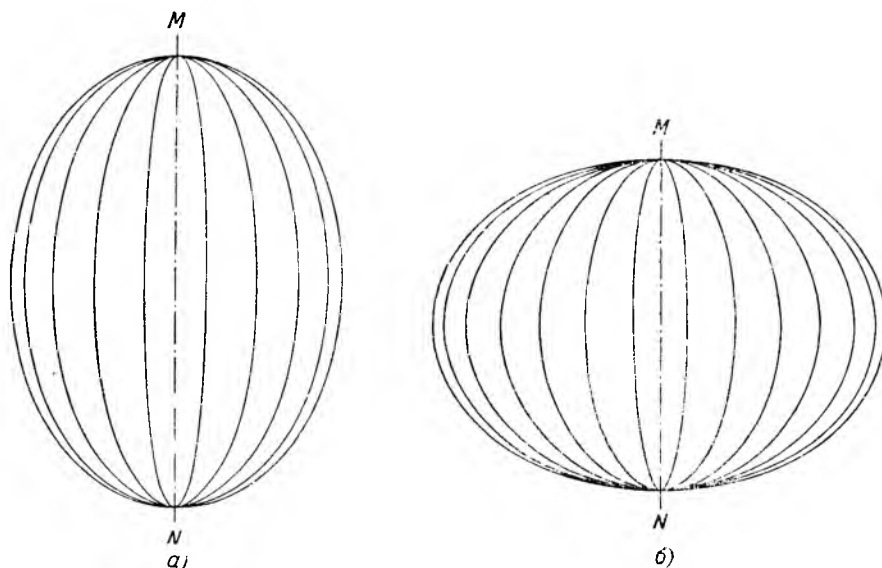


Рис. 154. Эллипсоиды вращения: а) вытянутый; б) сжатый (вид сбоку).

Если меридиан—окружность, не пересекающаяся с осью вращения, то поверхность вращения—*тор* (рис. 155).

Переходим к телам вращения.

Если меридиан—замкнутая линия или оба его конца находятся на оси вращения, то поверхность вращения ограничит часть пространства—*тело вращения*.

Тело вращения может быть получено и вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в её плоскости.

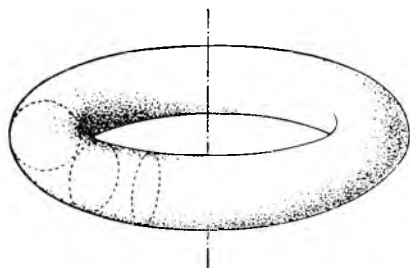
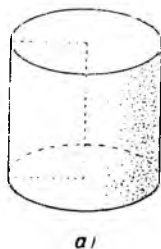
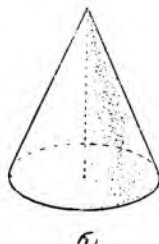


Рис. 155. Тор.



а)



б)

Рис. 156. Тела вращения:
а) круговой цилиндр; б) круговой конус.

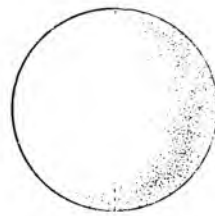


Рис. 157. Шар.

Приведём примеры. При вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон образуется круговой цилиндр (рис. 156, а). При вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов образуется круговой конус (рис. 156, б). При вращении полукруга вокруг его диаметра образуется шар (рис. 157).

На рис. 158 показано несколько предметов, имеющих форму тел вращения, что иногда связано со способом их изготовления (рис. 159).

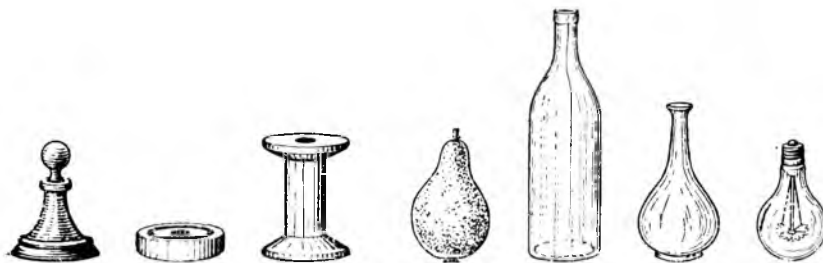


Рис. 158. Предметы, имеющие форму тел вращения.

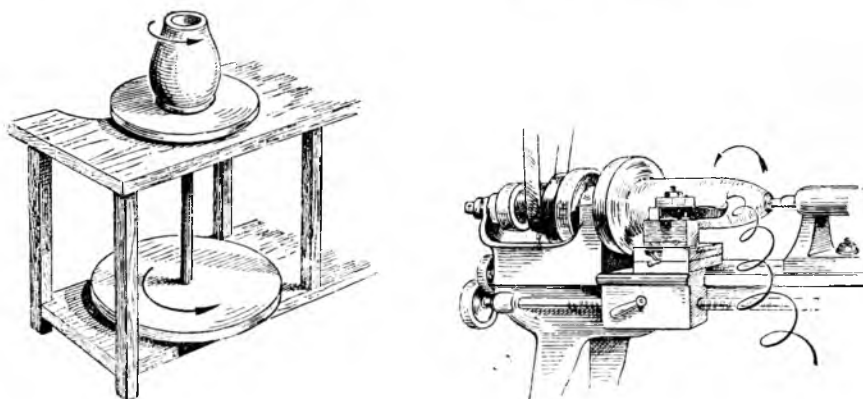


Рис. 159. Изготовление тел вращения.

§ 56. Винтовая линия

Возьмите круглый карандаш и вырежьте из листа бумаги прямоугольный треугольник, один катет которого равен длине карандаша, а другой имеет любую длину (рис. 160, а и б).

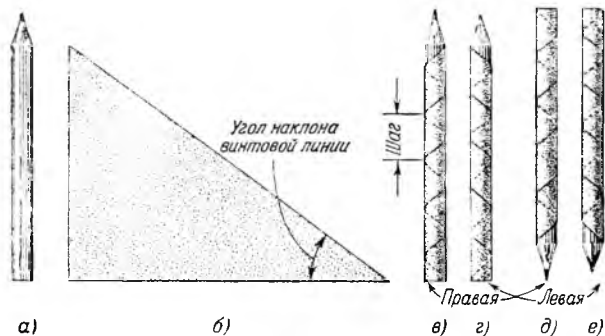


Рис. 160. Образование винтовой линии.

Приложите треугольник первым катетом вдоль длины карандаша и «наверните» треугольник на карандаш. Тогда гипотенуза прямоугольного треугольника образует на поверхности цилиндра *винтовую линию* (рис. 160, в).

Треугольник можно «навернуть» на карандаш и в противоположном направлении; в этом случае гипотенуза образует винтовую линию (рис. 160, г), симметричную первой. Эти две винтовые линии отличаются

одна от другой только направлением витков*); на рис. 160, в на видимой стороне винтовая линия *поднимается слева направо*—её называют *правой*;

*) Пусть точка движется по винтовой линии. Если глаз наблюдателя находится на оси цилиндра, то удаляющаяся от наблюдателя точка будет вращаться: по направлению движения часовой стрелки, если винтовая линия правая, против направления движения часовой стрелки, если винтовая линия левая.

на рис. 160, *г* на видимой стороне винтовая линия поднимается *справа налево*—её называют *левой*.

Повернув карандаш на 180° , так чтобы его очинённый конец оказался внизу, мы увидим, что правая винтовая линия останется правой (рис. 160, *д*), а левая—левой (рис. 160, *е*).

Большинство винтов (болтов), а также штопоры и т. д. представляют собою правые винтовые линии.

Расстояние между двумя смежными витками винтовой линии, измеренное по любой образующей цилиндра, постоянно для данной винтовой линии и называется *шагом винтовой линии*. Для задания винтовой линии необходимо знать две величины:

- 1) радиус (или диаметр) цилиндра,
- 2) шаг (или угол наклона) винтовой линии.

Винтовую линию можно получить ещё и другими способами, например:

1. Будем вращать круглую палку вокруг своей оси и одновременно нажимать на неё острым лезвием ножа, поставленным под углом к её оси (рис. 161). Тогда, при одновременном соответственном перемещении палки вдоль своей оси, на её поверхности будет надрезана винтовая линия, шаг которой зависит от угла между лезвием и образующими цилиндра.

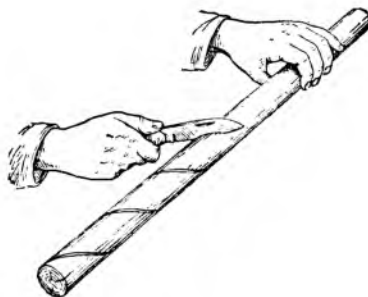


Рис. 161. Получение винтовой линии на круглой палке при помощи ножа.

2. На токарном станке установлен стальной цилиндр.

При вращении цилиндра вокруг его оси (рис. 162, *а*) *неподвижный* кончик резца опишет на поверхности цилиндра *окружность*.

При перемещении резца вдоль неподвижного цилиндра (рис. 162, *б*) кончик резца прочертит на поверхности цилиндра *одну из его образующих*.

При одновременном равномерном вращении цилиндра и перемещении резца тот же кончик резца опишет на поверхности цилиндра *винтовую линию* (рис. 162, *в*).

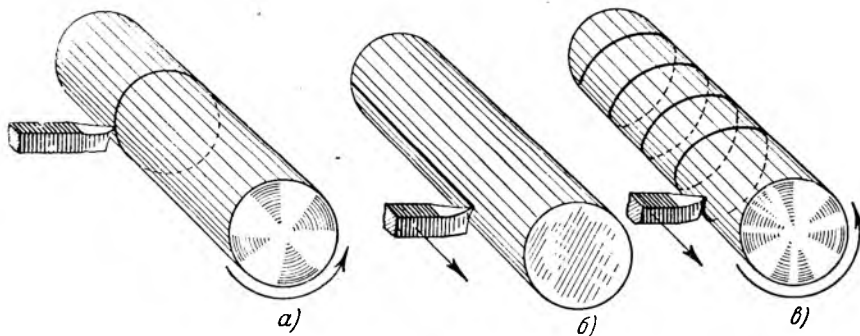


Рис. 162. Получение винтовой линии при помощи токарного станка.

Упражнения. 1. Вырежьте из бумаги прямоугольный треугольник той же высоты, что и раньше, но с большим (или меньшим) основанием, и «паверните» его на тот же карандаш; новая винтовая линия отличается от первой тем, что у неё меньший (или больший) шаг; на протяжении той же длины карандаша у неё будет больше (или, соответственно, меньше) витков.

2. Как изменится шаг винтовой линии, полученной на токарном станке (рис. 162, *в*), если:

- 1) сохранив скорость вращения, увеличить вдвое скорость перемещения резца;
- 2) сохранив скорость перемещения резца, увеличить число оборотов втрое;
- 3) одновременно увеличить в четыре раза и скорость вращения цилиндра, и скорость перемещения резца?

Построение эюра одного полного витка винтовой линии ясно из рис. 163.

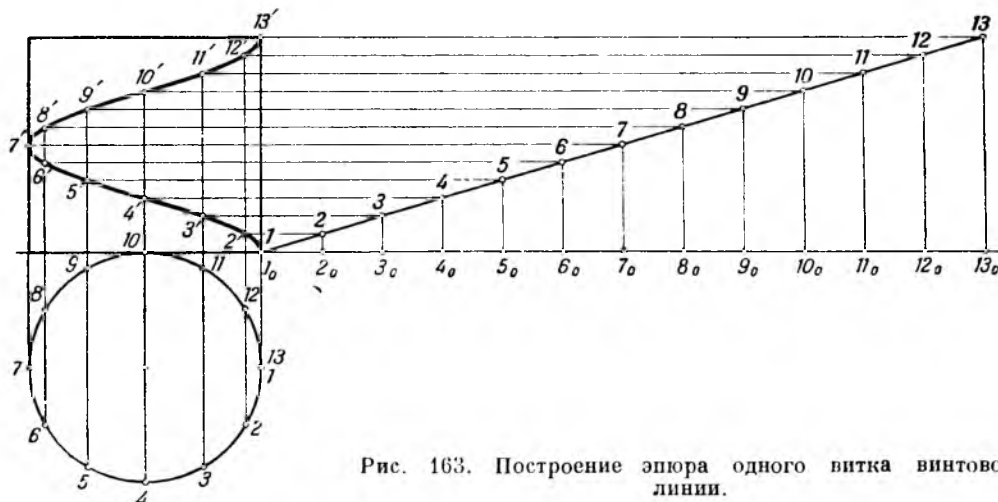


Рис. 163. Построение эюра одного витка винтовой линии.

Винтовая линия является единственной пространственной кривой (т. е. кривой, не лежащей в одной плоскости), обладающей тем же основным свойством, что прямая и окружность, а именно: *любая часть винтовой линии может перемещаться вдоль этой линии, не изменяя своей формы*. Именно поэтому нарезка винта может продвигаться в нарезке гайки. Винтовая линия повсюду одинакова

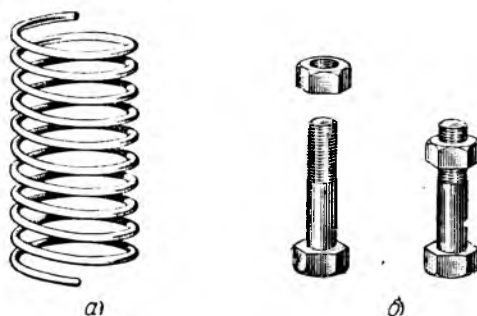


Рис. 164. а) Винтовая пружина; б) болт и гайка.

Винтовые линии широко применяются в технике: пружины (рис. 164, а), винтовая нарезка болтов и гаек (рис. 164, б), шнеки для перемещения сыпучих тел (зерна, цемента) и т. д.

ГЛАВА VIII

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

§ 57. Получение новых изображений предмета

Многие задачи на эюре решаются проще или сложнее в зависимости от положения оригинала относительно плоскостей H и V . Пусть, например, требуется определить истинную величину отрезка по его проекциям. Обратимся к рис. 43 на стр. 29. На рис. 43, б истинная величина отрезка сразу видна; для определения же истинной величины отрезка, данного на рис. 43, а, требуется сделать некоторое построение.

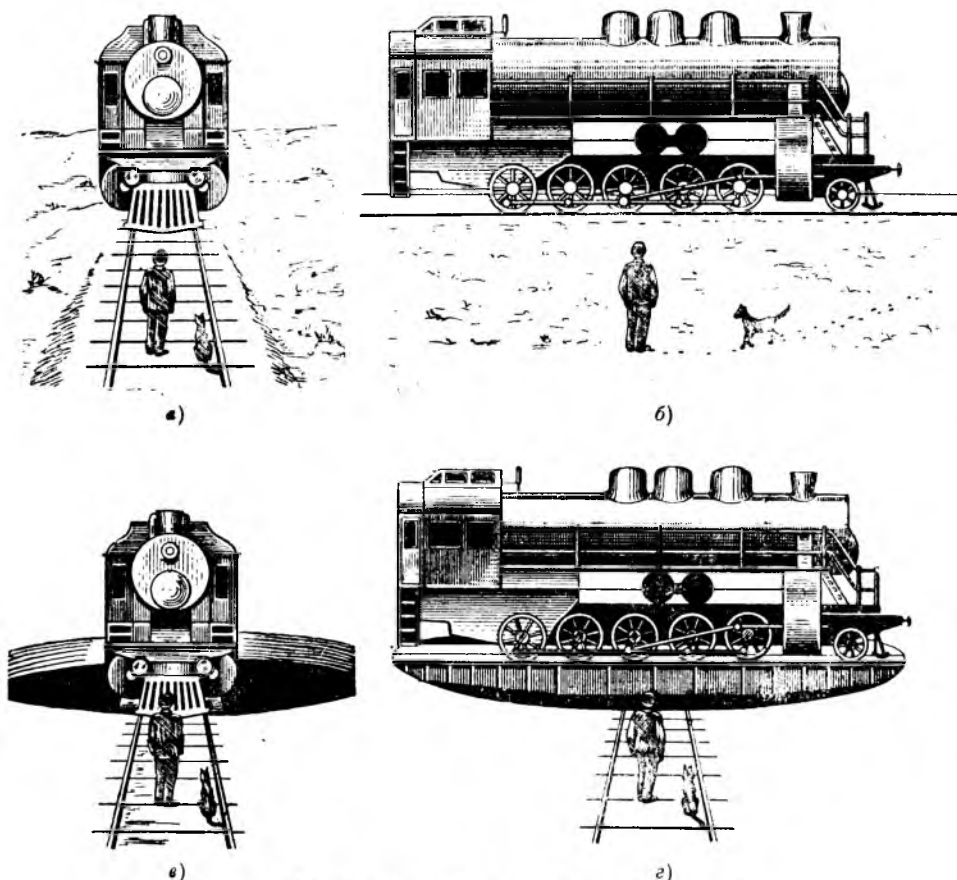


Рис. 165. Два способа увидеть паровоз сбоку.

Поэтому при решении многих задач (главным образом задач на определение **истинных** размеров) приходится преобразовывать данные проекции с целью

поставить оригинал в более удобное положение по отношению к плоскостям проекций. Следующий наглядный пример пояснит сущность применяемых для этого способов.

Я рассматриваю паровоз (рис. 165, а). Так как я стою прямо перед паровозом, то вижу его спереди; для того чтобы увидеть его сбоку, я вынужден переместить место: сойти с пути и, пройдя несколько шагов, стать как раз против середины паровоза (рис. 165, б); передо мною теперь «боковой» вид паровоза.

Аналогично этому в начертательной геометрии для получения на эюре нового изображения данного предмета нужно *переменить направление проектирования, а вместе с ним и перпендикулярную к нему плоскость проекций*.

Пусть теперь я снова рассматриваю паровоз спереди (рис. 165, в), но на этот раз он стоит на поворотном круге. Не сходя с места, я вижу, как поворачивают паровоз; после того как поворотный круг, а с ним вместе и паровоз будут повернуты на 90° , я увижу «боковой вид» паровоза (рис. 165, г).

Аналогично этому в начертательной геометрии для получения нового изображения предмета нужно *повернуть предмет вокруг какой-либо оси, оставив направление проектирования и плоскость проекций без изменений*.

В рассмотренном примере мы получили один и тот же боковой вид паровоза двумя различными способами: 1) заменили вертикальную плоскость проекций, 2) повернули предмет вокруг вертикальной оси.

В соответствии с этим в начертательной геометрии применяются следующие основные способы преобразования проекций: 1) изменение положения плоскостей проекций при неизменном положении оригинала; 2) изменение положения оригинала при неизменных плоскостях проекций.

Первый способ называется *способом замены плоскостей проекций*.

Второй способ называется *способом вращения*.

Если требуется найти истинный вид плоской фигуры, то применяется упрощённый приём вращения фигуры вокруг её горизонтали или фронтали; за горизонталь или фронталь можно принять соответствующий след плоскости — в этом случае способ вращения плоскости называется *способом совмещения*.

§ 58. Вращение точки и отрезка прямой линии

Привязав крепко к прочной нитке резинку А, мальчик вращает её, как показано на рис. 166. Если считать, что кисть руки остаётся всё время на месте*),

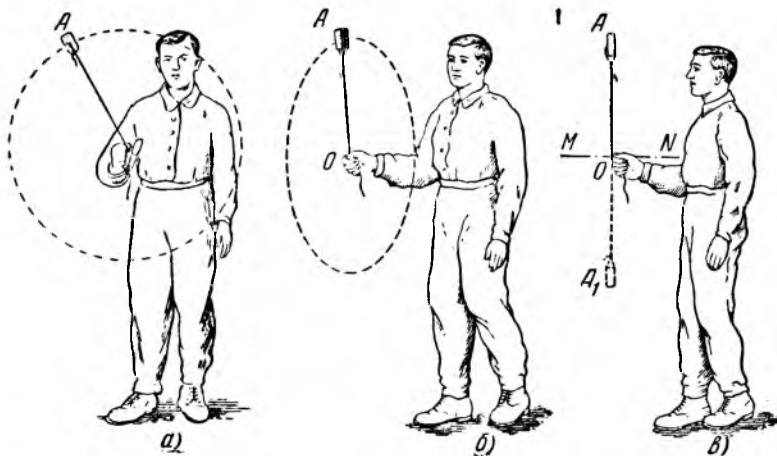


Рис. 166. Вращение, наблюдаемое с разных точек зрения.

*) На самом деле, для того чтобы резинка вращалась, приходится делать кистью руки небольшие круговые движения. Для простоты мы не будем принимать во внимание этих движений.

то грузик будет описывать о к р у ж н о с т ь, центр которой точка O , а радиус OA . На рис. 166, *а* мы видим окружность, потому что плоскость, в которой происходит вращение, параллельна плоскости чертежа и, следовательно, ось вращения перпендикулярна к этой плоскости.

При других положениях наблюдатель увидит эту окружность в виде эллипса или отрезка прямой (рис. 166, *б* и *в*; см. также рис. 136).

У п р а ж н е н и е. Какие линии описывают различные точки доски качелей (рис. 167)? Какими они покажутся наблюдателю, смотрящему спереди, сбоку, сверху?

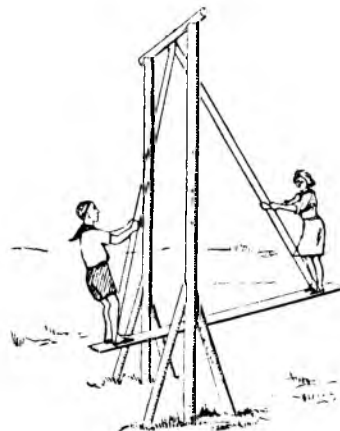


Рис. 167. Какой путь описывают отдельные точки качелей и каким он кажется с разных точек зрения?

Применим результаты произведённых наблюдений к решению некоторых задач начертательной геометрии.

Пусть точка A вращается вокруг вертикальной оси (рис. 168, *а*). Требуется изобразить линию, по которой движется эта точка.

Точка A будет двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна к вертикальной оси вращения MN , т. е. горизонтальна. Поэтому путь точки A спроектируется на горизонтальную плоскость без искажения, т. е. в виде окружности. Радиус этой окружности равен am —расстоянию точки A от оси вращения; горизонтальную проекцию окружности вращения легко построить, описав из точки m (она же n) как из центра окружность радиуса ma

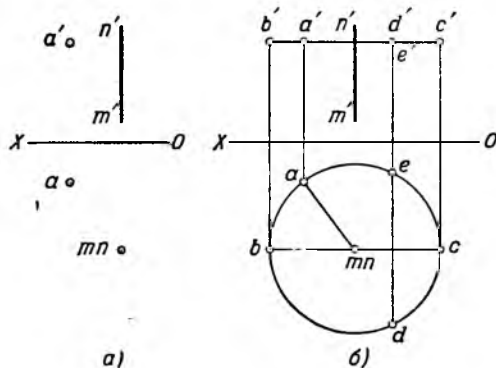


Рис. 168. Вращение точки вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H .

(рис. 168, *б*). Вертикальная же проекция траектории точки A —это отрезок горизонтальной прямой, проходящей через вертикальную проекцию точки A ; концы b' и c' этого отрезка мы находим, снеся точки b и c (концы диаметра, параллельного OX) на эту прямую.

Итак, при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций (*т. е.* вокруг вертикальной оси), горизонтальная проекция этой точки описывает окружность, радиус которой равен расстоянию точки от оси, а вертикальная проекция движется по отрезку, параллельному OX ; длина этого отрезка равна диаметру окружности. При этом горизонтальной проекции d любой точки D окружности соответствует её вертикальная проекция d' , как показано на рис. 168, *б* *).

*) Заметьте, что та же точка d' является вертикальной проекцией и другой точки, F , этой же окружности.

Аналогично при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций, вертикальная её проекция описывает окружность, а горизонтальная проекция движется по отрезку, параллельному OX .

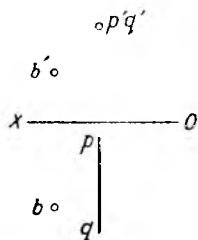


Рис. 169. Постройте траекторию точки B , вращающейся вокруг оси PQ .

У п р а ж н е н и е. Построить на эшюре линию, по которой движется точка B , вращающаяся вокруг оси PQ , перпендикулярной к вертикальной плоскости проекций (рис. 169).

Представим себе отрезок AB прикрепленным соединительными стержнями к вертикальной оси MN (рис. 170). Проекции отрезка— $a'b'$ и ab , а проекции оси—прямая $m'n'$ и точка m (она же n). Пусть теперь отрезок AB вращается около оси MN . Мы знаем, что при этом точка A и точка B движутся по горизонтальным окружностям, центры которых лежат на оси вращения, а радиусы равны расстоянию соответствующей точки от оси вращения. Эти окружности показаны на чертеже в горизонтальной проекции. При повороте на 360° все точки отрезка опишут полные окружности и отрезок вернётся на прежнее место.

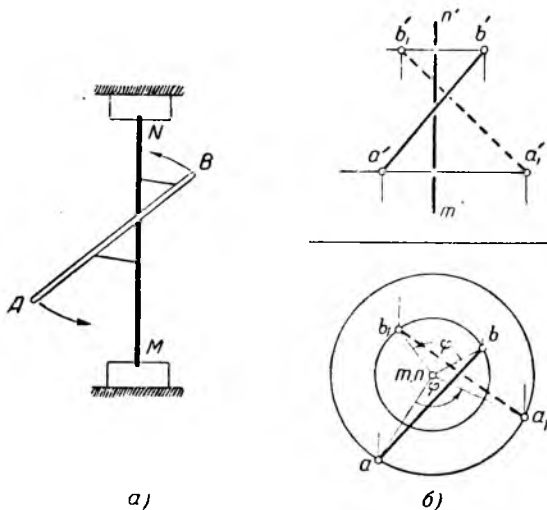


Рис. 170. Вращение отрезка вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H .

Нам нужно знать не только путь, описываемый концами отрезка AB , но и промежуточные положения этого отрезка. Пусть, например, нужно найти положение отрезка AB в том случае, когда точка A перешла в положение A_1 (проекция этого нового положения: a_1 и a'_1). Где окажется при этом точка B ?

Мы можем её найти, рассуждая так: из положения A в положение A_1 точка A пришла по дуге окружности, описав дугу AA_1 и повернувшись, таким образом, на центральный угол $\varphi = \angle AmA_1$. На этот же угол повернулась, очевидно, и любая другая точка отрезка AB .

Построив угол bmb_1 , равный углу ama_1 в том же направлении (на нашем чертеже—против часовой стрелки), мы на пересечении стороны mb_1 с окружностью радиуса mb получим точку b_1 , соединив которую с a_1 , найдём новое положение a_1b_1 горизонтальной проекции отрезка AB . Вертикальные же проекции a'_1 и b'_1 точек A и B найдём, с нею с точки a_1 и b_1 на прямые, проведённые через a' и b' параллельно оси OX . Таким образом, в новом положении отрезок будет иметь проекции a_1b_1 и $a'_1b'_1$, показанные на рис. 170 штриховой линией.

§ 59. Определение истинной величины отрезка способом вращения

Мы уже умеем определять истинную величину отрезка по его проекциям при помощи вспомогательного прямоугольного треугольника (см. рис. 48 или 49, на стр. 32). Решим теперь эту же задачу другим способом — с п о с о б о м в р а щ е н и я.

Из рис. 170 видно, что при вращении отрезка AB вокруг вертикальной оси MN не изменяется величина его горизонтальной проекции ($ab = a_1b_1$).

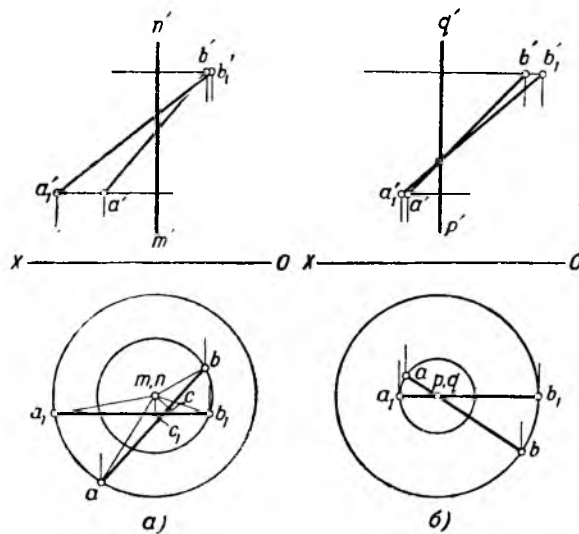


Рис. 171. Поворот отрезка AB в положение, параллельное плоскости V .

Величина же вертикальной проекции непрерывно изменяется. Вращая отрезок AB вокруг оси MN , мы можем привести отрезок в такое положение, когда будет очень легко определить истинную его величину. Это делается так. Остановим вращение отрезка вокруг вертикальной оси в тот момент, когда его горизонтальная проекция станет параллельной оси OX (рис. 171, а). Это промежуточное положение легко построить, если предварительно провести высоту mc в треугольнике amb и затем, придав отрезку mc вертикальное положение mc_1 , провести горизонтальную прямую через точку c_1 и достроить треугольник a_1mb_1 . По горизонтальной проекции a_1b_1 строится известным нам способом и вертикальная проекция $a_1'b_1'$. В таком положении отрезок A_1B_1 будет параллелен плоскости V и, следовательно, спроектируется на эту плоскость без искажения (в истинную величину).

В рассмотренном примере ось вращения MN с к р е щ и в а л а с ь с отрезком AB . На рис. 171, б показан случай вращения отрезка AB вокруг вертикальной оси PQ , пересекающей отрезок. Построения в этом случае упрощаются.

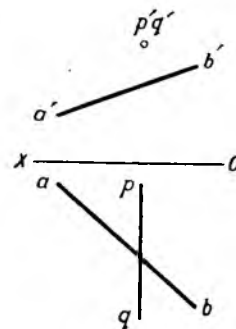


Рис. 172. Поверните отрезок AB вокруг оси PQ на 30° , 45° , 90° , 180° , 270° . Найдите его истинную величину.

У п р а ж н е н и е. Повернуть отрезок AB , изображённый на рис. 172, вокруг оси PQ , перпендикулярной к плоскости V , на 30° , 45° , 90° , 180° , 270° против часовой стрелки. Найти истинную величину отрезка AB .

§ 60. Вращение тела

Подобно тому как в предыдущих параграфах мы вращали точку или отрезок, можно вращать и геометрическое тело, например куб, вокруг оси, перпендикулярной к плоскости H или V , и получать на эюре различные положения этого куба. Для этого нужно повернуть вокруг данной оси на данный угол каждую вершину куба и затем соединить прямыми линиями новые положения вершин—они и дадут нам рёбра куба.

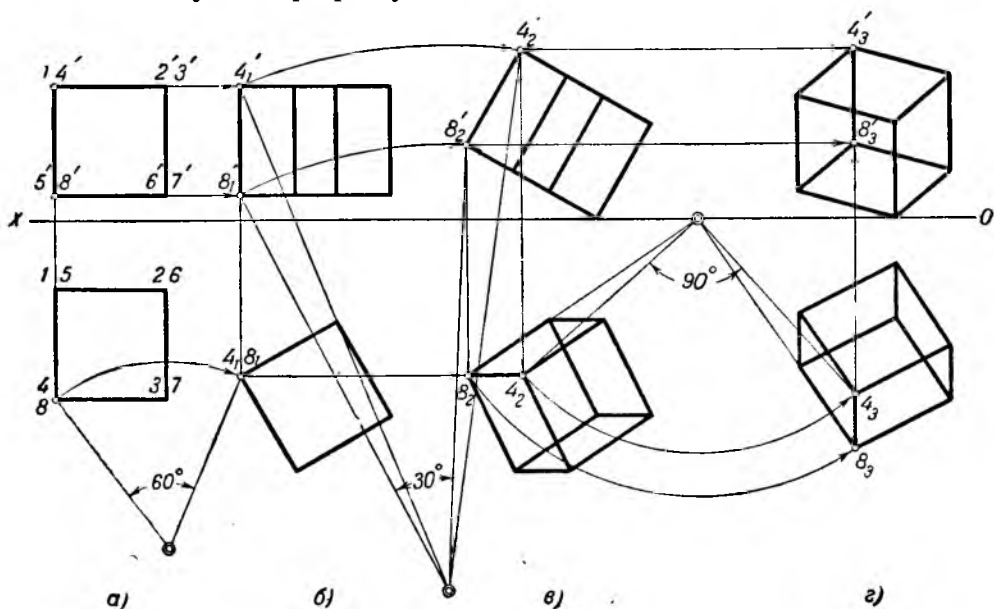


Рис. 173. Вращение куба.

На рис. 173 показаны четыре последовательных положения куба:
а) две грани (1—2—3—4 и 5—6—7—8) куба параллельны плоскости H ; две грани (1—2—6—5 и 3—4—8—7) параллельны плоскости V ;
б) куб повернут на 60° вокруг вертикальной оси;
в) затем куб повернут на 30° вокруг оси, перпендикулярной V ;
г) наконец, куб повернут на 90° вокруг вертикальной оси.

На рисунке показано построение последовательных положений вершин 4 и 8 куба.

У п р а ж н е н и я. 1. Повернуть на 45° , 90° и 120° пирамиду, изображённую на рис. 138 (на стр. 71), вокруг вертикальной оси, проходящей через точку D . Направление вращения—против часовой стрелки.

2. Повернуть ту же пирамиду на те же углы вокруг оси, перпендикулярной к плоскости V и проходящей через вершину S . Направление вращения—по часовой стрелке.

3. Повернуть последовательно четыре раза пирамиду, изображённую на рис. 140, « (на стр. 72) следующим образом:

- | | | | |
|----|--|-----|-----------------|
| 1) | вокруг оси, проходящей через вершину 1 перпендикулярно | V | на 30° . |
| 2) | » | » | » |
| 3) | » | » | » |
| 4) | » | » | » |

Вращать можно по часовой стрелке или против неё—как позволяет место на чертеже

§ 61. Совмещение плоскостей

До сих пор мы рассматривали вращение только вокруг осей, перпендикулярных к одной из плоскостей проекций. Вращение точек, линий, плоскостей и тел можно производить и вокруг других осей. В начертательной геометрии широко применяется вращение плоскости вокруг её следа.

На рис. 174, а изображена плоскость P ; её следы— P_v и P_h .

Станем вращать плоскость P вокруг её горизонтального следа P_h до совмещения с горизонтальной плоскостью проекций H *). След P_h при этом всё время будет оставаться на месте; конечно, не переместится и точка схода следов; остаётся найти положение бывшего вертикального следа P_v после совмещения плоскости P с плоскостью H ; это положение мы обозначим P_{v1} .

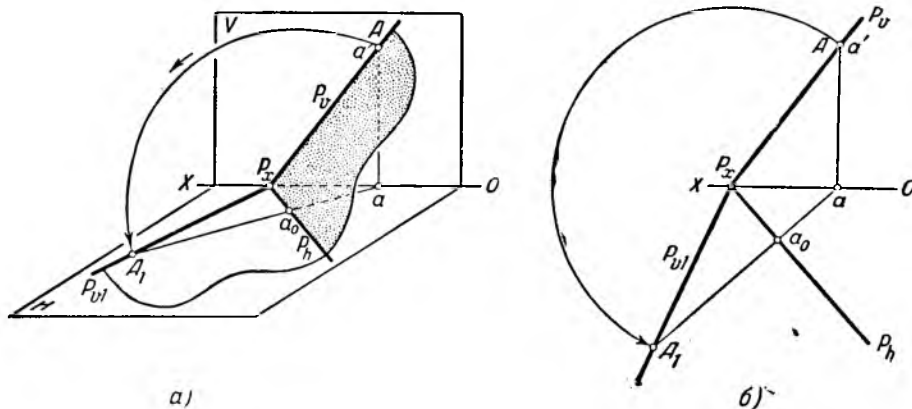


Рис. 174. Совмещение плоскости P с горизонтальной плоскостью проекций.

Во избежание недоразумений разъясним подробнее термин «*бывший вертикальный след*». Будем рассматривать след P_v как прямую, твёрдо нанесённую (например, изображённую краской) на плоскости P . Как только плоскость P начнёт вращаться вокруг горизонтального следа, упомянутая прямая тронется в путь и *перестанет играть роль вертикального следа*; поэтому мы и назвали её *бывшим вертикальным следом*.

Но одна точка нового положения бывшего вертикального следа плоскости, а именно точка P_x схода следов, нам известна; остаётся найти совмещённое положение ещё одной какой-либо его точки.

Возьмём на вертикальном следе P_v произвольную точку A . Куда попадёт она после вращения плоскости P вокруг следа P_h до совмещения с плоскостью H ?

При вращении плоскости вокруг P_h точка A , как и всякая другая точка плоскости P , движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной к оси вращения P_h ; поэтому её горизонтальная проекция a перемещается по прямой aa_0 , перпендикулярной к горизонтальной оси вращения P_h . С другой стороны, сколько бы мы ни вращали плоскость P (а с ней и точку A) вокруг оси P_h , расстояние от точки A до точки схода следов P_x будет неизменным. Следовательно, *искомая точка лежит на пересечении прямой aa_0 и дуги AA_1* .

Обратимся к эпюру (рис. 174, б). Опустив из a перпендикуляр aa_0 на P_h и продолжив его до пересечения с дугой окружности радиуса $P_x a'$, описанной из точки P_x , получим искомое совмещённое положение A_1 точки A ; соединив A_1 с точкой схода следов, получим P_{v1} —совмещённое положение бывшего следа P_v .

Упражнение. Совместить плоскость Q с H ; совместить плоскость Q с V (рис. 175).

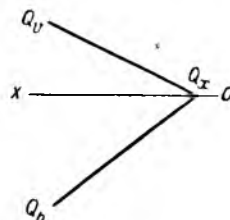


Рис. 175. Совместите плоскость Q с плоскостью H , с плоскостью V .

*) Полезно сделать картонную модель плоскостей H , V и P и, читая этот текст, производить на модели соответствующее вращение плоскости P вокруг прямой P_h до совмещения её с плоскостью H .

§ 62. Определение истинной величины плоской фигуры способом совмещения

Значение способа совмещения хорошо видно из следующего примера.

На рис. 176 дан эппюр треугольника ABC (для ясности обе проекции заштрихованы). Требуется определить истинный вид этого треугольника.

Совмещая плоскость треугольника с плоскостью проекций, мы получим треугольник без искажения.

Прежде всего построим следы плоскости P , в которой лежит треугольник. Эта задача была решена в § 30 (рис. 79 на стр. 43).

После того как найдены следы P_h и P_v , совместим плоскость P с одной из плоскостей проекций, например с плоскостью H , повернув её около следа P_h ,

как это было сделано в предыдущем параграфе (см. рис. 174 на стр. 89). Вертикальный след P_v после совмещения займёт положение P_{v1} .

Вместе со всей плоскостью P совместился с плоскостью H и треугольник ABC . Как же определить положение вершин A , B и C треугольника на совмещённой с H плоскости P ?

Прежде всего заметим, что при вращении вокруг следа P_h каждая точка вращающейся плоскости будет описывать в пространстве дуги окружностей, лежащих в вертикальных плоскостях, перпендикулярных к оси вращения P_h . Следовательно, при этом движении точки a , b и c будут двигаться по прямым aa_0 , bb_0 и cc_0 , перпендикулярным к P_h . Значит, точка A будет где-то на прямой aa_0 , точка B — где-то на прямой bb_0 , точка C — где-то на прямой cc_0 . Где же именно?

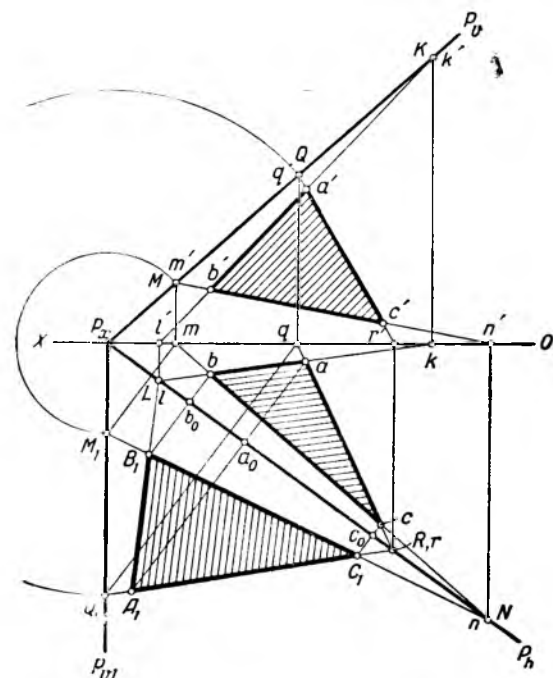


Рис. 176. Совмещение треугольника с плоскостью H .

Обратим внимание на прямую BC . Её горизонтальный след N при совмещении не изменит своего положения, а вертикальный след M займёт положение M_1 . Таким образом, эта прямая займёт положение NM_1 , а её точки B_1 и C_1 получатся на пересечениях bb_0 и cc_0 с NM_1 . Точка A_1 получается аналогичным образом при помощи следов Q и R прямой AC .

Таким образом, мы нашли точки A_1 , B_1 и C_1 ; треугольник $A_1B_1C_1$ и есть треугольник ABC в натуральную величину.

Тот факт, что точка C_1 оказалась в месте пересечения трёх прямых: cc_0 , M_1N и Q_1R , указывает на точность наших построений.

Точку A можно найти и проще: продолжив ab до P_h , найти точку L , а из этой точки провести через B_1 прямую до пересечения с aa_0 .

Заметим, что треугольник ABC при вращении плоскости вокруг следа P_h перевернулся, т. е. мы получили на H его сторону ACB , в то время как на плоскости H и V проектировалась обратная сторона — сторона ABC .

Совмещение плоскости P с плоскостью H можно осуществить также, вращая P вокруг P_h в другом направлении. Можно также совместить P с вертикальной плоскостью проекций V , вращая P вокруг P_v в ту или другую сторону.

§ 63. Вращение плоской фигуры вокруг горизонтали или фронтали

Задачу, которую мы только что решили—«найти истинную величину треугольника, заданного двумя проекциями»,—можно решить проще. Мы решили эту задачу, совместив плоскость P , в которой лежит данный треугольник ABC , с плоскостью H ; для этого нам пришлось предварительно найти горизонтальный след плоскости P , а затем повернуть плоскость P (вместе с треугольником ABC) вокруг этого следа. Горизонтальный след плоскости—это одна из горизонталей. Истинную величину треугольника ABC мы получили бы также и в том случае, если бы вращали его вокруг любой другой горизонтали до того момента, пока его плоскость не стала бы параллельна плоскости H .

Итак, вместо построения следа построим любую горизонталь треугольника ABC и повернём треугольник вокруг неё.

Пусть BD —горизонталь нашего треугольника, проходящая через его вершину B (рис. 177).

Проведём $b'd'$ параллельно оси проекций и найдём bd , снеся точку d' на прямую ac .

При вращении треугольника ABC вокруг горизонтальной оси BD точки B и D , лежащие на этой оси, останутся на месте. Точки же A и C пойдут по дугам окружностей, центры которых лежат на оси BD ; плоскости окружностей перпендикулярны к оси BD , а следовательно, горизонтальные проекции точек будут перемещаться по прямым, перпендикулярным к bd . Проведём через точки a и c прямые aa_0 и cc_0 , перпендикулярные к bd . Где-то на прямой aa_0 будет лежать точка A , а на прямой cc_0 —точка C . Когда треугольник ABC окажется параллельным плоскости H , то он спроектируется на H без искажения.

Поэтому, определив истинную величину ba_1 стороны AB по её проекциям ab и $a'b'$ способом, изложенным в § 21*), засечем радиусом ba_1 из центра B точку A на прямой aa_0 . Затем соединим A с d прямой линией и продолжим её до пересечения в точке C с продолжением c_0c . Соединив C с B , получим треугольник ABC в натуральную величину.

Сравните полученный треугольник с тем же треугольником, полученным в предыдущем параграфе. Убедитесь, что оба построения привели к одному и тому же результату, но второе построение—проще.

На рис. 177 одна часть чертежа «налезла» на другую. Такие неприятные случаи могут встретиться и на практике. Поэтому надо стремиться к более удобной компоновке чертежа. Так, например, при решении данной задачи можно было вращать треугольник ABC пока вершина A не оказалась бы левее bd , а вершина C —правее; тогда искомый треугольник не пересек бы ось OX .

У п р а ж н е н и е. Повторите эту задачу, повернув треугольник ABC в противоположную сторону. Заметьте, что он спроектируется на H другой стороной.

Вращая плоскость треугольника вокруг её г о р и з о н т а л и, мы приводили её в такое положение, при котором она оказывалась параллельной г о р и з о н т а л ь н о й плоскости проекций. Аналогично, вращая плоскость фигуры вокруг её ф р о н т а л и, мы можем привести её в такое положение, что она окажется параллельной вертикальной плоскости проекций и следовательно, спроектируется на эту плоскость без искажения.

У п р а ж н е н и е. Вращая тот же треугольник ABC (рис. 177) вокруг его фронтали, определите его истинную величину; сопоставьте полученную фигуру с найденными ранее.

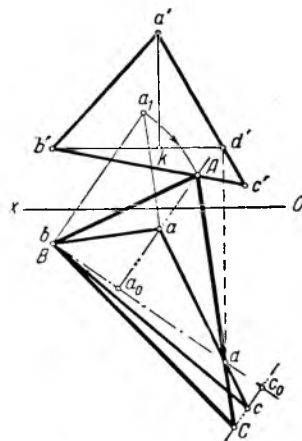


Рис. 177. Вращение треугольника вокруг горизонтали.

*) Строим прямоугольный треугольник baa_1 по катетам ab и $aa_1 = a'k$ (превышению резка AB).

§ 64. Перемена плоскостей проекций

На рис. 178 точка A задана, как обычно, двумя проекциями a и a' .

Заменим вертикальную плоскость проекций V другою (рис. 178, а). За новую вертикальную плоскость проекций можно принять любую плоскость, перпендикулярную к H . Новая вертикальная плоскость проекций V_1 пересекает

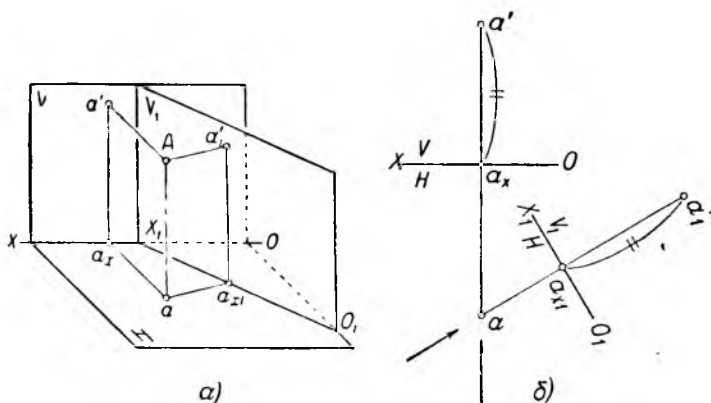


Рис. 178. Перемена вертикальной плоскости проекций.

Найдём на эюре новую вертикальную проекцию a'_1 точки A (рис. 178, б), руководствуясь следующими соображениями:

1) Старая вертикальная проекция a' находится на одном перпендикуляре к старой оси OX с горизонтальной проекцией a . Подобно этому и новая вертикальная проекция a'_1 находится на одном перпендикуляре к новой оси O_1X_1 с той же горизонтальной проекцией a .

2) При перемене вертикальной плоскости проекций расстояние точки A от горизонтальной плоскости проекций не изменилось; не изменилось, следовательно, и равное ему расстояние вертикальной проекции точки A от оси проекций. Поэтому для нахождения точки a'_1 надо: а) опустить из a на новую ось проекций O_1X_1 перпендикуляр aa_{x1} ; б) отложить на продолжении этого перпендикуляра от точки a_{x1} отрезок $a_{x1}a'_1$, равный a_xa' .

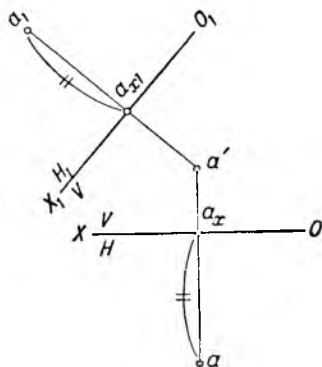


Рис. 179. Перемена горизонтальной плоскости проекций.

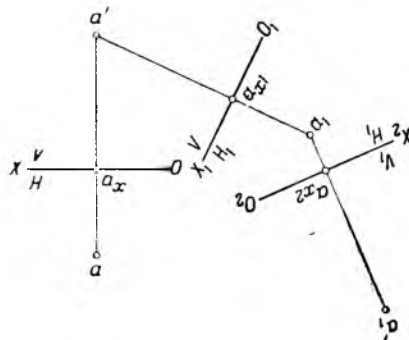


Рис. 180. Двукратная перемена плоскостей проекций.

Аналогично перемене вертикальной плоскости проекций производится перемена горизонтальной плоскости проекций (рис. 179). В этом случае новая плоскость проекций H_1 (перпендикулярная к V) уже не будет горизонтальной в буквальном смысле этого слова. Однако мы будем называть её **н о в о й**

горизонтальной плоскостью проекций, а проекции на неё—н о в ы м и горизонтальными проекциями.

Читатель без труда разберётся, как строится новая горизонтальная проекция точки ($a'a_1 \perp O_1X_1$, $a_{x_1}a_1 = a_xa$).

Иногда бывает необходимо д в а ж д ы переменить плоскости проекций: на рис. 180 показана перемена сначала плоскости H на H_1 , а потом плоскости V на V_1 .

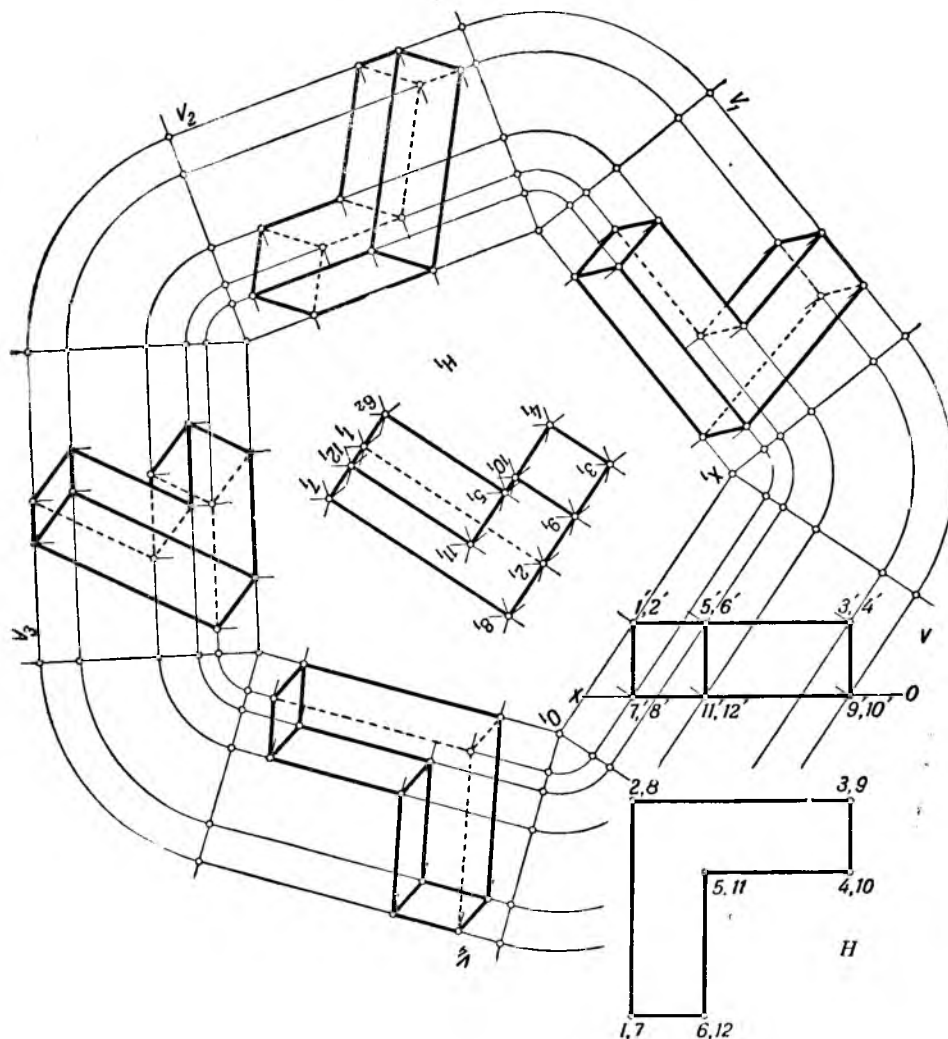


Рис. 181. Многократная перемена плоскостей проекций.

На рис. 181 дано Г-образное тело $1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12$ двумя проекциями на V и на H . Затем плоскость проекций H заменена плоскостью H_1 , проходящей через ребро $1-2$ тела (новая ось проекций— O_1X_1), и построена новая горизонтальная проекция тела, находящаяся в центре рисунка. Затем вертикальная плоскость проекций V заменена последовательно плоскостями V_1 , V_2 , V_3 и V_4 и построены четыре новые вертикальные проекции данного тела. Новая горизонтальная проекция тела соответствует каждой из пяти вертикальных проекций тела.

Все построения ясны из чертежа.

У п р а ж н е н и я. 1. Найдите новые вертикальные проекции точек A , B и C при замене вертикальной плоскости V новой плоскостью V_1 (рис. 182).

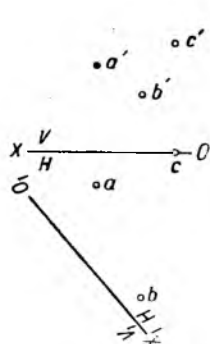


Рис. 182. Найдите новые вертикальные проекции точек A , B и C .

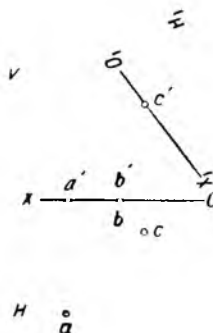


Рис. 183. Найдите новые горизонтальные проекции точек A , B и C .

2. Найдите новые горизонтальные проекции точек A , B и C (рис. 183).
 3. Найдите новые проекции точек A , B , C и D после двукратной перемены плоскостей проекций (рис. 184).
 4. Постройте новую вертикальную проекцию пирамиды (рис. 185); то же—горизонтальную.

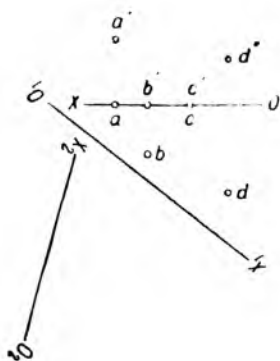


Рис. 184. Найдите новые проекции точек A , B , C и D при двукратной замене плоскостей проекций.

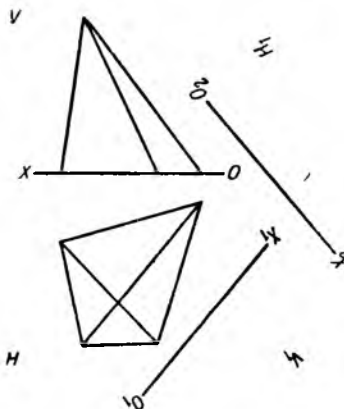


Рис. 185. Постройте новые проекции пирамиды.

5. Обозначьте вершины тела на рис. 181 на всех четырёх новых вертикальных проекциях. Почему на V_1 , V_2 , V_3 и V_4 проекции ребра $9-10$ параллельны соответствующей оси проекций?

§ 65. Некоторые задачи, решаемые методом перемены плоскостей проекций

Ни одна из двух данных проекций треугольника ABC (рис. 186, a) не даёт истинного вида треугольника, так как его плоскость не параллельна ни одной из плоскостей проекций.

Ранее (в §§ 62 и 63), вращая треугольник, мы приводили его плоскость в положение, параллельное одной из плоскостей проекций. Тот же результат можно получить, не беспокоя самого треугольника, а именно—переменой плоскостей проекций.

Строим горизонталь BD и проводим $O_1X_1 \perp bd$. В таком случае треугольник ABC спроектируется на перпендикулярную к его плоскости новую вертикальную плоскость проекций V_1 в отрезок $a'_1c'_1$ (проверкою точности

построений служит то, что три точки, a'_1 , b'_1 и c'_1 , должны оказаться на одной прямой).

Новую горизонтальную плоскость проекций H_1 проведём (разумеется, перпендикулярно V_1) параллельно плоскости треугольника, т. е. $O_2X_2 \parallel a'_1c'_1$. Построив новую горизонтальную проекцию $a_1b_1c_1$ треугольника, получим треугольник ABC без искажения.

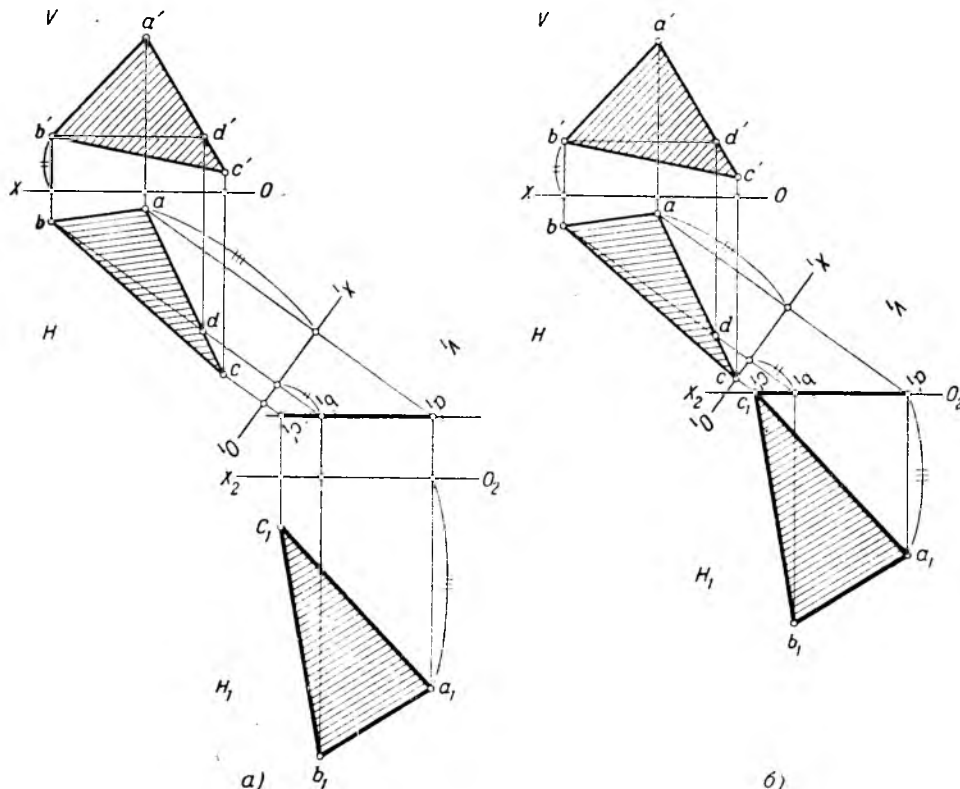


Рис. 186. Нахождение истинного вида треугольника методом перемены плоскостей проекций.

При решении этой задачи направление новых осей проекций было строго фиксировано: $O_1X_1 \perp bd$ и $O_2X_2 \parallel a'_1c'_1$. Но положение оси может быть выбрано произвольно, так как новую плоскость проекций мы можем произвольно поместить поближе или подальше от нашего треугольника.

Для упрощения построений и для получения более компактного чертежа новые плоскости проекций лучше проводить, например, так, как на рис. 186, б).

Заметим, что горизонталь BD была нужна нам только для определения направления O_1X_1 .

Где окажутся точки d'_1 и d_1 на новых проекциях треугольника ABC ? Каков геометрический смысл того, что d'_1 совпадает с b'_1 ?

Почему $b_1d_1 = bd$?

Сравните полученный треугольник ABC (с точкой D) с тем же треугольником (и тоже с точкой D), найденным методом вращения на рис. 177 (стр. 91).

У п р а ж н е н и е. Найдите истинную величину того же треугольника ABC (рис. 186) двукратным изменением плоскостей проекций; новую горизонтальную плоскость проекций постройте перпендикулярно к фронтали плоскости треугольника.

Даны две скрещивающиеся прямые общего положения— AB и CD (рис. 187); требуется определить кратчайшее расстояние между ними.

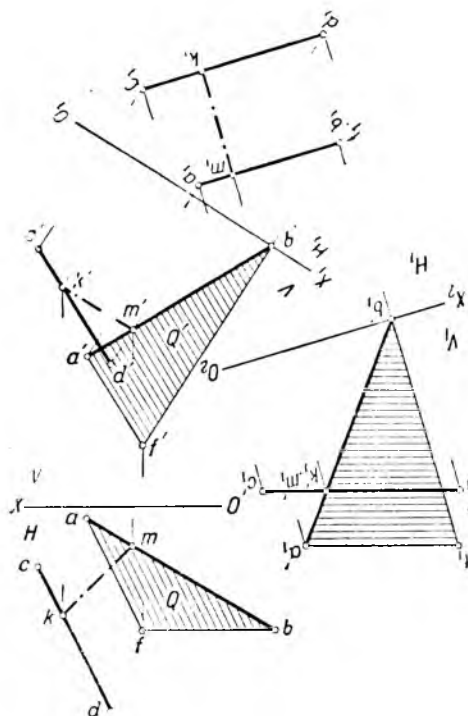


Рис. 187. Нахождение кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми методом замены плоскостей проекций.

$a_1'b_1'c_1'd_1'$ —проекция отрезка KM , перпендикулярного к обоим заданным отрезкам. Находим последовательно k_1 и m_1 , затем k' и m' и, наконец, k и m . Точки K и M найдены.

Проведём через AB вспомогательную плоскость Q , параллельную CD ; в таком случае расстояние от прямой CD до плоскости Q и есть искомое кратчайшее расстояние между прямыми AB и CD (почему?).

Для того чтобы плоскость Q была параллельна CD , проводим через A прямую $AF \parallel CD$; две пересекающиеся прямые AB и AF определяют плоскость Q . С целью упрощения построений проводим $bf \parallel OX$, т. е. направляем BF параллельно плоскости V . Заменяем плоскость проекций H плоскостью H_1 , перпендикулярной V и FB , для чего проводим $O_1X_1 \perp f'b'$.

На новой проекции треугольник ABF спроектируется в отрезок $a_1'b_1'(f_1)$, а отрезок CD —в параллельный ему отрезок $c_1'd_1$; расстояние между $a_1'b_1$ и $c_1'd_1$ и есть искомое кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD . Задача решена.

Если же требуется указать, какие именно точки M и K соответственно на прямых AB и CD являются самыми близкими, то заменим плоскость проекций V плоскостью $V_1 \parallel Q$, для чего проводим $O_2X_2 \parallel a_1'b_1 \parallel c_1'd_1$. На новой проекции треугольник $a_1'b_1f_1'$ —неискажённая проекция треугольника ABF ; $c_1'd_1'$ —истинная величина отрезка CD ; точка пересечения

§ 66. Замечание о числе преобразований проекций

В общем случае для получения нового изображения приходится вращать тело дважды: сначала вокруг оси, перпендикулярной к одной плоскости проекций, а затем—вокруг оси, перпендикулярной ко второй плоскости проекций; аналогично в общем случае приходится заменять плоскости проекций также два раза, т. е. выполнять не малую графическую работу.

В отдельных случаях искомая проекция может быть получена проще: лишь одной операцией (одним вращением, либо одной заменой плоскостей проекций).

Решите приведённые ниже шесть задач. Для каких из них достаточна одна операция, а для каких необходимы две?

- 1) Произвольную прямую поставьте перпендикулярно к плоскости проекций;
- 2) произвольную прямую поставьте параллельно плоскости проекций;
- 3) прямую, параллельную одной плоскости проекций, приведите в положение, перпендикулярное ко второй плоскости проекций;
- 4) произвольную плоскость приведите в положение, перпендикулярное к одной из плоскостей проекций;
- 5) произвольную плоскость поставьте параллельно одной из плоскостей проекций;
- 6) плоскость, перпендикулярную к одной из плоскостей проекций, поставьте параллельно другой плоскости проекций.

ГЛАВА IX

РАЗВЁРТКИ

§ 67. Понятие о развёртках

Пусть требуется из плоского куска какого-нибудь материала изготовить оболочку, т. е. полое тело, например изготовить из листа картона коробку для папирос или из листа жести консервную банку. По какому образцу следует сделать выкройку? Как решается этот вопрос для призмы, пирамиды, конуса, сферы и других тел?

Такую выкройку в геометрии называют *развёрткой* данного тела.

В практической жизни развёртки находят чрезвычайно широкое применение: котельщики, кровельщики, портные, жестянщики, картонажники и работники многих других специальностей часто имеют дело с развёртками.

Изучение развёрток начнём со следующего примера.

Возьмём пустую коробку и разрежем её по четырём боковым рёбрам (рис. 188, а). Затем последовательно отогнём все четыре боковые грани—мы получим крестообразный кусок картона.

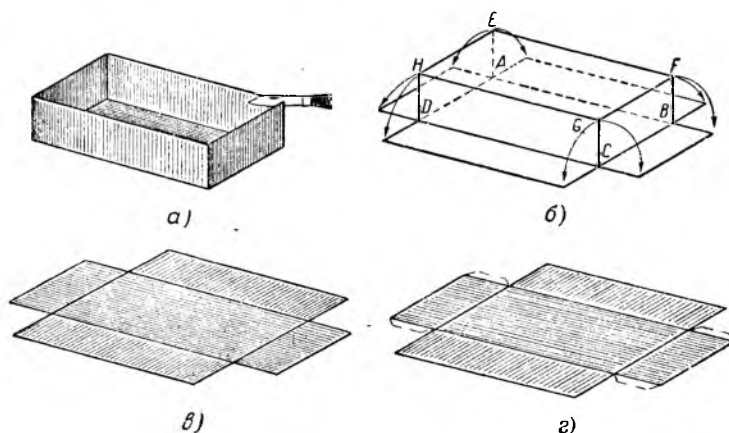


Рис. 188. Развёртка коробки (без крышки).

Выражаясь языком геометрии, мы вращаем боковые грани $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ и $DAEN$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDEFGH$ (рис. 188, б) соответственно вокруг рёбер AB , BC , CD и DA до совмещения их с плоскостью нижнего основания $ABCD$ (рис. 188, в).

Мы получили на плоскости фигуру, которая называется *развёрткой* нашей коробки.

И обратно, для того чтобы сделать коробку, надо вырезать из плоского листа картона такую фигуру—развёртку, затем загнуть соответствующим образом боковые прямоугольники и, наконец, соединить каждые две смежные боко-

вые стороны по их общему ребру. (Соединить друг с другом две боковые стороны можно при помощи клея, добавив в каждом шве по одному «клапану» в виде трапеции—рис. 188, з.)

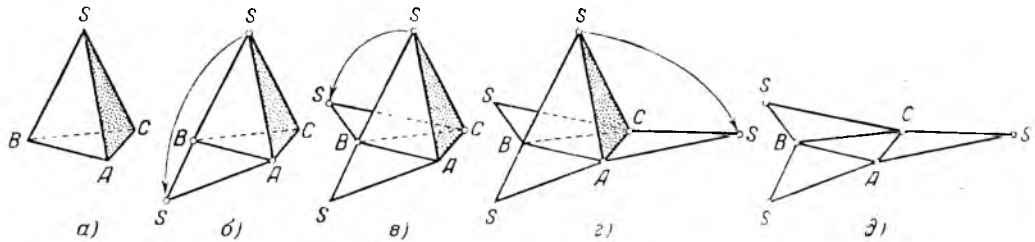


Рис. 189. Развёртка треугольной пирамиды.

Рассмотрим ещё один пример—развёртку треугольной пирамиды. Пирамида $SABC$ стоит своим основанием ABC на горизонтальном листе бумаги (рис. 189, а). Обведём карандашом контур ABC основания на бумаге.

Затем отогнём три боковые грани (как будто поверхность пирамиды разрезана по рёбрам SA , SB и SC) до совмещения их с плоскостью основания. На рис. 189, б показано совмещение одной боковой грани; аналогично совмещаются остальные (рис. 189, в и г). Полученная развёртка изображена (в перспективе) на рис. 189, д.

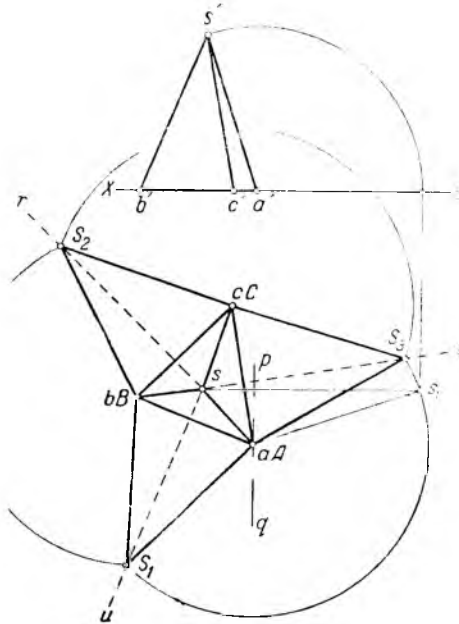


Рис. 190. Построение развёртки пирамиды по её эпиюру.

задаётся нам не всегда; наша задача сделать самим, например, развёртку.

Мы сейчас увидим, что для получения развёртки вовсе не нужна сама пирамида, достаточен её эпиюр.

Требуется построить развёртку треугольной пирамиды $SABC$, пользуясь её эпиюром (рис. 190).

Разрезав поверхность пирамиды по боковым рёбрам SA , SB и SC , станем вращать боковые грани SAB , SBC и SCA вокруг соответствующих рёбер AB , BC и CA основания до совмещения с плоскостью H ; при этом точки A , B и C останутся на месте, и задача сводится к отысканию трёх новых положений точки S на плоскости H .

Упражнения. 1. Сделайте из бумаги открытый коробок длиной 5 см, шириной 3 см, высотой 1 см. Для этого начертите его развёртку, вырежьте и склейте её.

2. Начертите развёртку треугольной пирамиды $SABC$ по размерам: $SA=5$ см, $SB=6$ см, $SC=8$ см, $BC=10$ см, $CA=7$ см, $AB=8$ см.

§ 68. Получение развёртки по эпиюру

Для того чтобы построить развёртку способом, изложенным в предыдущем параграфе, нужно было иметь оригинал (например, картонную коробку или пирамиду). На практике же оригинал задачи именно в том и заключается, пирамиду, изготовив предварительно её

Задачу такого рода мы уже рассматривали в предыдущей главе: это—не что иное, как определение истинных размеров треугольника методом совмещения (рис. 176 на стр. 90). Роль горизонтального следа плоскости треугольника здесь играют рёбра основания, вокруг которых происходит вращение. Мы знаем, что при вращении вокруг ребра AB точка S пойдёт по дуге окружности, расположенной в вертикальной плоскости; горизонтальная проекция этой окружности—отрезок, перпендикулярный к AB . Следовательно, опустив из точки s перпендикуляр su на ab (она же AB), мы получим горизонтальную проекцию пути, по которому движется точка S . Где же на этой прямой находится точка S_1 —вершина пирамиды, совмещённая с горизонтальной плоскостью H ?

Мы сумеем найти эту точку, если будем знать истинную величину ребра, например SA , нашей пирамиды. Найдём величину ребра SA способом вращения. Вращая SA вокруг оси PQ , проходящей через точку A и перпендикулярной к плоскости V , мы получим отрезок $AS = as_1$ в натуральную величину.

Остаётся только найти на перпендикуляре su точку S_1 , расстояние которой от a равно as_1 . Это легко сделать при помощи циркуля; мы получаем вершину S_1 совмещённого треугольника. S_1ab —совмещение грани SAB нашей пирамиды.

Аналогично можно найти совмещения граней SBC и SCA .

Для построения развёрток этих двух граней SBC и SCA опускаем из точки S перпендикуляры sr и st на BC и CA ; где-то на этих перпендикулярах должны находиться точки S_2 и S_3 —совмещённые положения вершины пирамиды. Но теперь уже нет необходимости применять способ вращения. В треугольниках SBC (он же S_2bc) и SCA (он же S_3ca) сторона SB (S_2b) равна стороне S_1b , а сторона SA (S_3a) равна стороне S_1a только что найденного треугольника S_1ba (развёртки стороны SBA). Поставим ножку циркуля в точку b ; радиусом, равным bS_1 , опишем дугу до пересечения с перпендикуляром, опущенным из S на bc , и получим точку S_2 —вершину треугольника S_2bc . Аналогично построим развёртку грани SAC —треугольник S_3ac .

Проверкой точности построения служит сравнение длин стороны SC , получившейся дважды: в треугольниках S_2BC и S_3CA , для чего из точки c как из центра описываем дугу S_2S_3 .

Таким образом, построена развёртка боковой поверхности треугольной пирамиды $SABC$. Полная развёртка пирамиды $SABC$ состоит из этой боковой поверхности и основания ABC , проектирующегося на H в натуральном виде.

Вырежем из плотной бумаги звёздчатую фигуру развёртки треугольной пирамиды $SABC$; при этом для возможности склеивания модели пирамиды оставим вдоль каждого из склеиваемых рёбер добавочную полоску бумаги («клапан»), имеющую форму трапеции (рис. 191, а). Для облегчения сгибания

фигуры развёртки по рёбрам AB , BC , CA , AS , BS и CS надо по этим отрезкам острым ножом надрезать бумагу. Так как на чертежах развёрток, построенных указанным способом, к нам обращена внутренняя сторона граней тела, то надрезы надо сделать с противоположной стороны развёртки.

Заметим, что расположение граней на развёртке может быть различным (можно было разрезать поверхность пирамиды по другим рёбрам). На рис. 191, б изображён другой вариант развёртки той же пирамиды.

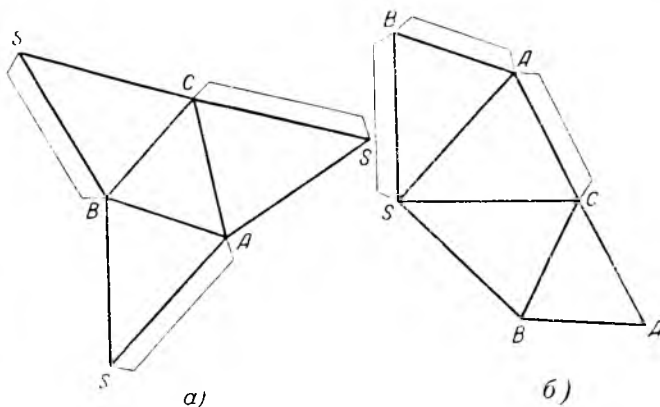


Рис. 191. Развёртка треугольной пирамиды.

Существует много вариантов развёртки каждого многогранника. В зависимости от формы и размеров многогранника и листа бумаги, листовой стали или другого материала, из которого вырезают развёртку, мы выбираем тот вариант, при котором будет меньше отходов материала, меньшая длина швов и т. д.

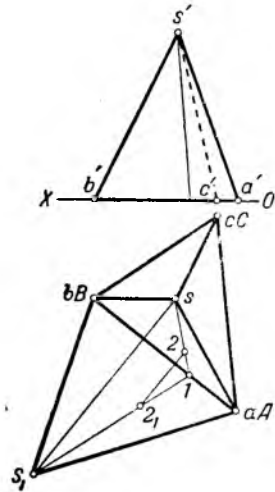


Рис. 192. Развёртка треугольной пирамиды с прямой, проведённой на боковой грани.

Часто на поверхности данного тела бывают нанесены какие-нибудь точки и линии.

Рассмотрим пример. На эюре треугольной пирамиды задана точка 2, лежащая на грани ASB (рис. 192).

Положение этой точки на развёртке найдём при помощи вспомогательной прямой, проведённой через данную точку. Эту прямую целесообразно провести через вершину пирамиды, так как тогда придётся делать меньше построений для нахождения совмещённого положения вспомогательной прямой $S-1$.

При совмещении грани ASB с плоскостью H точка 1, лежащая на оси вращения—ребре AB , не изменит своего положения; точка 2, лежащая в плоскости ASB , оставаясь на этой плоскости, опишет дугу окружности; проекция этой дуги на плоскость H —прямая, перпендикулярная AB ; поэтому точку 2_1 найдём, опустив из точки 2 перпендикуляр на AB и продолжив его до пересечения с s_1-I^* .

Умение находить на развёртках точки и прямые, лежащие на гранях, используется при изготовлении моделей пересекающихся тел (см., например, § 85).

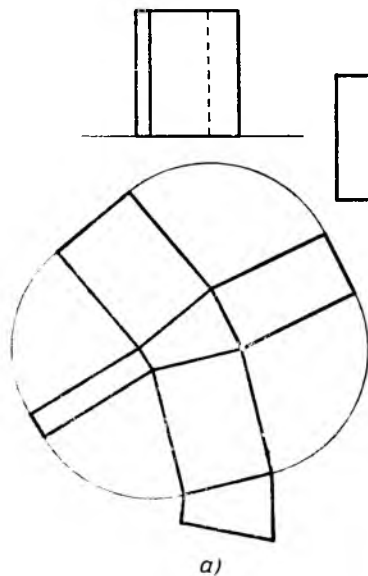


Рис. 193. Развёртка прямой четырёхугольной призмы.

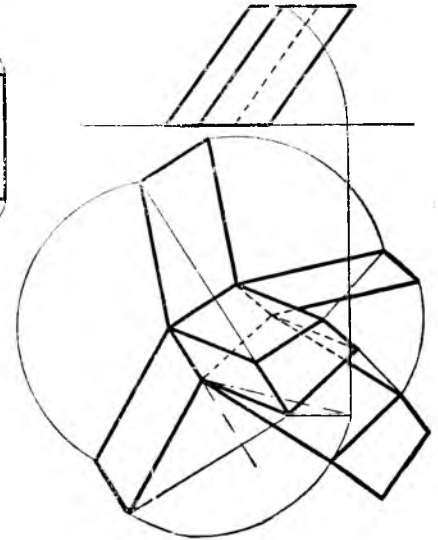
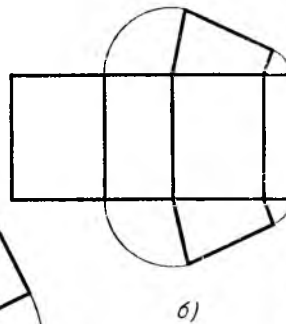


Рис. 194. Развёртка наклонной четырёхугольной призмы.

На рис. 193, а и б дано построение двух развёрток прямой четырёхугольной призмы, стоящей на плоскости H ; на рис. 194 дано построение развёртки наклонной четырёхугольной призмы, стоящей на этой же плоскости. Читатель сам разберётся в этих построениях.

*) Заметим, что точка на ребре многогранника получится на развёртке дважды в том случае, если по этому ребру вскрыта боковая поверхность тела.

Для построения развёртки призмы можно применить ещё следующий способ.

Представим себе, что тяжёлый ящик перемещают с одного места на другое, перекатывая его так, как показано на рис. 195. В этом случае на земле останутся отпечатки граней ящика; отпечатки можно рассматривать как элементы развёртки боковой поверхности ящика. Это приводит нас к следующему приёму построения развёртки призмы.



Рис. 195. Перекатывание ящика.

Дана треугольная призма $ABCDEF$, лежащая на плоскости H своей гранью $ACFD$ (рис. 196). Станем перекатывать её сначала вокруг бокового ребра AD , затем BE и, наконец, CF . Так как все боковые рёбра призмы взаимно параллельны, то:

1) все без исключения точки призмы будут последовательно перемещаться по дугам кругов, причём плоскости этих кругов вертикальны; следовательно, горизонтальные проекции всех точек каждого круга пойдут по прямой, перпендикулярной направлению AD (ad);

2) на развёртке все боковые рёбра призмы (AD , BE , CF) также будут параллельны.

Проводим через точки a , b , c , d , e и f прямые, перпендикулярные ad ; горизонтальная проекция каждой из перечисленных шести точек перемещается по проведённой через неё вспомогательной прямой. На развёртке каждая из вершин будет находиться на соответствующей прямой.

Определив (например, вращением) истинную величину отрезка AB , находим точку B на развёртке. Проведя $BE \parallel AD$, находим точку E и грань $ADEB$ развёртки.

Определив истинную величину отрезка BC (построение на чертеже не показано), строим грань $BEFC$ развёртки.

Истинная величина ребра AC дана на горизонтальной проекции (это — ac); строим третью грань $CFDA$ развёртки*).

Достраиваем основания ABC и DEF .

Развёртка призмы $ABCDEF$ построена.

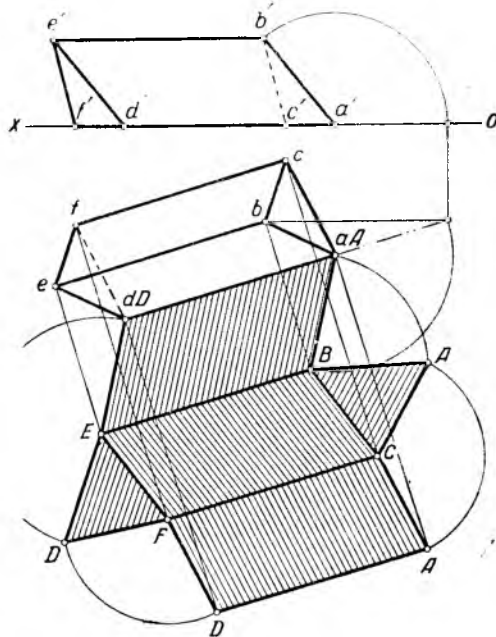


Рис. 196. Построение развёртки треугольной призмы приёмом перекатывания.

*) Эту грань можно было в данном случае и не строить; её истинная величина задана на эпюре ($cfd a$). Но так как она закрыта призмой, то мы построили её вновь и заштриховали всю развёртку призмы.

Если призма занимает произвольное положение в пространстве (рис. 197), то задачу можно свести к предыдущей, заменив плоскость проекций H плоско-

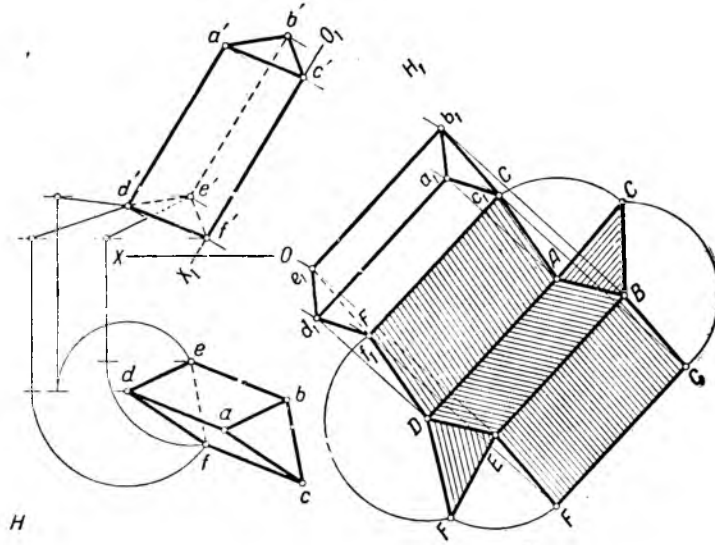


Рис. 197. Построение развёртки треугольной призмы, произвольно расположенной в пространстве.

стью H_1 , проходящей через ребро CF призмы, и развернув новую проекцию $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ призмы.

Проследите за всеми построениями на этом чертеже.

Развёртки могут строиться и без построения проекций тела. Для построения, например, развёртки куба вовсе не нужно чертить эшора—достаточно

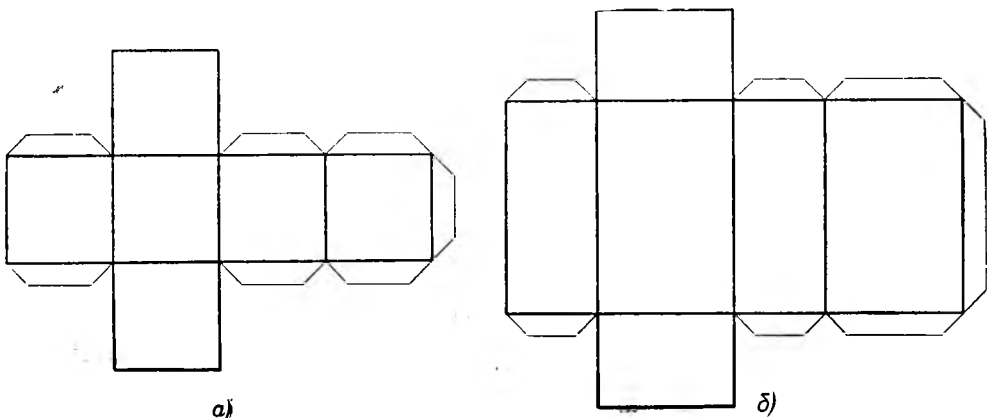


Рис. 198. Развёртка куба и прямоугольного параллелепипеда.

знать размер ребра этого куба (рис. 198, а); для построения развёртки прямоугольного параллелепипеда достаточно знать его высоту, ширину и длину (рис. 198, б).

Вот ещё два примера: развёртка правильной двенадцатиугольной призмы (рис. 199) и развёртка правильной двенадцатиугольной пирамиды (рис. 200).

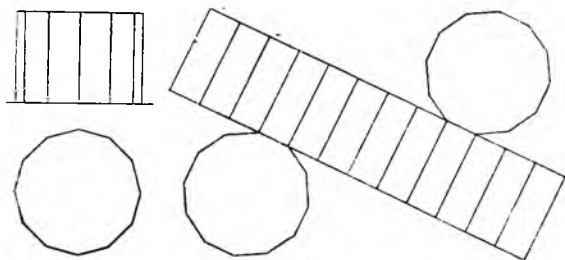


Рис. 199. Развёртка правильной двенадцатиугольной призмы.

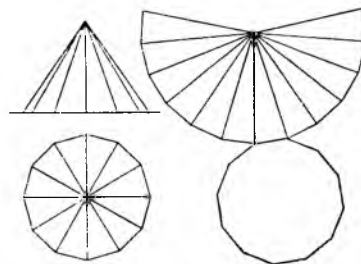


Рис. 200. Развёртка правильной двенадцатиугольной пирамиды.

У п р а ж н е н и я. 1. Укажите на проекции боковой поверхности пирамиды, изображённой на рис. 199, две случайные точки: на ребре SC и на грани ASC . Найдите эти точки на развёртке.

2. Постройте развёртки правильной шестиугольной призмы и правильной шестиугольной пирамиды, у которых боковые рёбра равны диаметру описанного вокруг основания круга.

§ 69. Задача о пауке и мухе

Рассмотрим одну известную задачу, решаемую при помощи развёрток.

На одной стене комнаты находится паук, а на противоположной стене — муха (рис. 201, *а*). Каков кратчайший путь от паука к мухе? (Это — не прямая линия: паук летать не может!)

Казалось бы, пауку следует опуститься на пол по кратчайшему направлению (т. е. отвесно), затем проползти по полу до подошвы перпендикуляра, опущенного из точки, в которой находится муха, и, наконец, подняться к мухе. Этот путь *а*, изображённый на рис. 201, *а*, однако, вовсе не кратчайший.

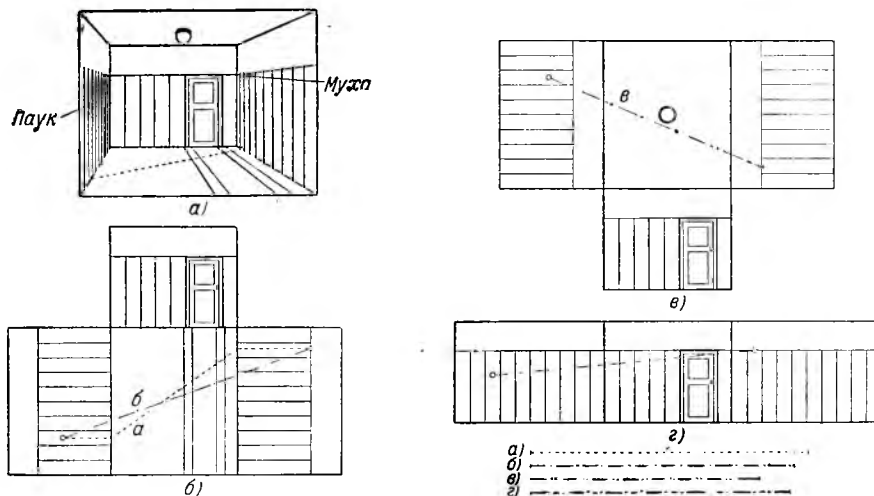


Рис. 201. Кратчайший путь от паука до мухи.

На рис. 201, *б* представлена развёртка комнаты, причём три стены совмещены с плоскостью пола (потолок не показан); для нахождения на данной развёртке кратчайшего пути от паука к мухе через пол достаточно соединить данные две точки прямой линией. Этот путь *б* короче, чем путь *а*.

Однако с левой стены на правую паук может попасть не только через пол, но и через потолок. На рис. 201, *в* дана развёртка трёх стен комнаты, совмещённых

ных с плоскостью потолка. Отрезок e , соединяющий на развёртке две данные точки,—кратчайший путь паука при следовании через потолок. Сравнив полученный отрезок e с отрезком b , мы увидим, что путь через потолок короче пути через пол.

Возможен ещё один путь, а именно через стену с дверью—путь, изображённый на развёртке—рис. 201, g . Этот путь g короче пути b , но длиннее пути e .

Сравнительные длины всех четырёх путей даны на рис. 201 справа внизу. Таким образом, пауку следует ползти по пути e .

Кроме того, следовало бы ещё рассмотреть путь через переднюю стену, но он, очевидно, длиннее пути g , а следовательно, и пути e .

У п р а ж н е н и я. 1. Определите расстояние от мухи до паука, учитывая, что муха полетит по прямой, а не будет ползать по стенам и полу или потолку.

2. Найдите кратчайшие пути на поверхности куба из одной его вершины во все семь остальных. Сколько вариантов пути из данной вершины в самую дальнюю?

3. То же—для прямоугольного параллелепипеда



Рис. 202. Развёртка боковой поверхности берёзовой чурки.

§ 70. Развёртки цилиндра и конуса

Возьмём берёзовую чурку (рис. 202); разрежем кору по прямой, параллельной оси ствола, и сдерём кору. Разгладив её, мы получим развёртку боковой поверхности чурки.

Развёртка боковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник, высота которого равна высоте цилиндра, а основание—длине окружности основания цилиндра.

Основания цилиндра—два равных круга, поэтому полная развёртка прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник и два круга (рис. 203).

На рис. 203, $в$ показана развёртка с клапанами для склеивания.

Построим развёртку прямого кругового конуса (рис. 204), разрезав его по образующей и по окружности основания. Ясно, что развёртка боковой поверхности конуса есть сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса.

Присоединив к этому сектору круг, служащий основанием конуса, получим полную развёртку конуса.

Если размеры конуса известны, т. е. даны его образующая l и радиус основания r , то для построения его развёртки следует предварительно вычислить угол сектора. Обозначим этот угол через α . Длины дуг одной окружности пропорциональны их центральным углам. Обозначим длину окружности основания конуса (равную длине дуги сектора) через s .

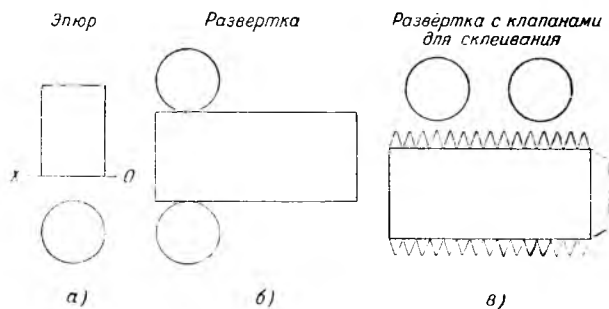


Рис. 203. Развёртка прямого кругового цилиндра.

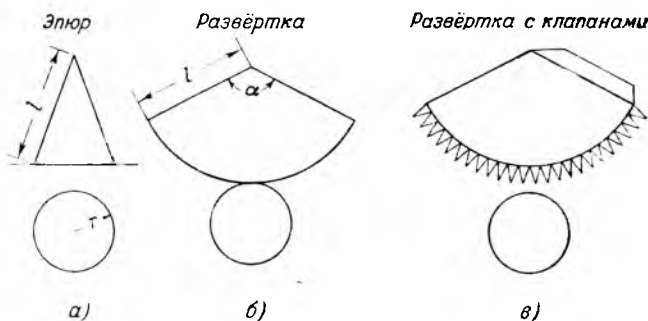


Рис. 204. Развёртка прямого кругового конуса.

Длина окружности радиуса l равна $2\pi l$. Ей соответствует угол 360° . Длина дуги равна s . Ей соответствует угол α .

Из пропорции $\frac{s}{2\pi l} = \frac{\alpha}{360}$ получаем:

$$\alpha = \frac{s}{2\pi l} \cdot 360^\circ.$$

Учтём теперь, что длина дуги сектора s должна равняться длине окружности основания конуса, т. е. $s = 2\pi r$. Подставив это выражение для s в предыдущую формулу, получим:

$$\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ.$$

Дан произвольный (не круговой) конус (рис. 205), стоящий на плоскости H ; требуется построить его развёртку.

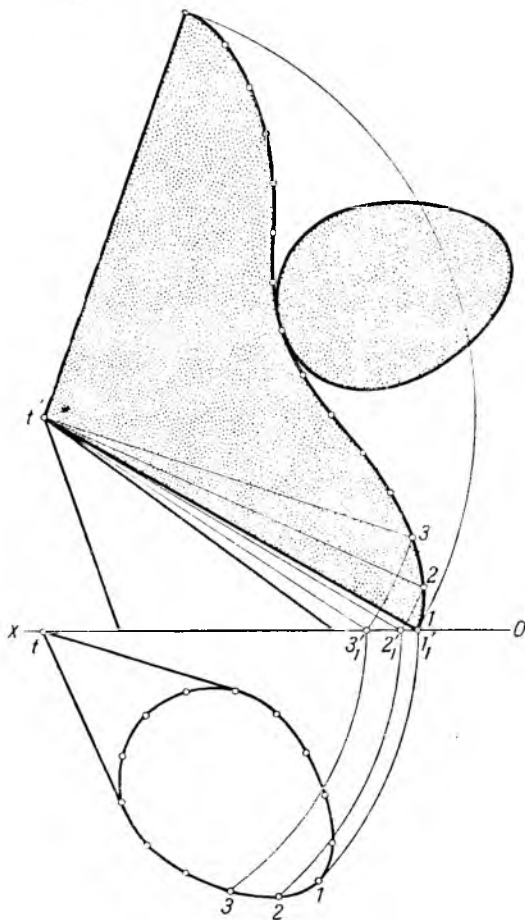


Рис. 205. Развёртка произвольного конуса.

Пометим на кривой, ограничивающей основание конуса, точки $1, 2, 3, \dots$; если соединить их с вершиной T конуса, то получится вписанная в конус пирамида $T-1-2-3\dots$. Строить развёртку любой пирамиды мы умеем.

Истинную величину рёбер $T-1, T-2, T-3, \dots$ пирамиды мы найдём методом вращения (в данной задаче построение несколько упрощается благодаря тому, что вершина T лежит в плоскости V). Развёртку её первой грани

$T-1-2$, имеющей форму треугольника, строим по трём сторонам: $T-1$, $T-2$ и $1-2$, где $1-2$ —длина (приблизительно) участка $1-2$ кривой основания, взятая из горизонтальной проекции. К первому треугольнику пристраиваем смежный ($T-2-3$) и т. д. Полученные на развёртке точки $1, 2, 3, \dots$ соединяем плавной кривой.



Рис. 206. Примеры развёртки цилиндра.

У п р а ж н е н и я. 1. Как по размерам этикетки (рис. 206) вычислить объём банки консервов (приблизительно)?

2. Каков приблизительно диаметр вашей шип, если номер воротничка обозначает его длину в сантиметрах (рис. 206)?

3. Заднее колесо грузовика, проехав лужину, оставляет на гладкой поверхности асфальта мокрый след—рисунок шины, точнее, отпечаток развёртки наружной поверхности покрышки (рис. 207).

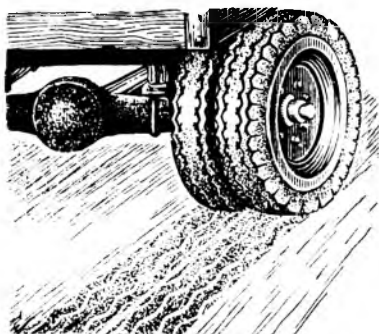


Рис. 207. Ещё один пример развёртки цилиндра.

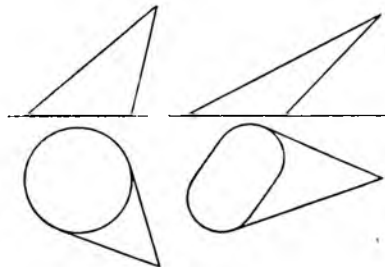


Рис. 208. Постройте развёртки этих конусов.

На поверхности покрышки есть знак; как, измерив расстояние между двумя смежными его отпечатками, вычислить наружный диаметр шины?

4. Изготовьте развёртки прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса, у которых высота равна диаметру круга основания.

5. Постройте развёртки конусов (рис. 208). Как нужно назначать точки на контуре основания? В чём существенное различие двух оснований в заданных эпюрах?

§ 71. Приближённые развёртки сферы

Для всякого многогранника можно построить точную развёртку. Цилиндр и конус также имеют точные развёртки, хотя *способ*, каким мы строили развёртку конуса на рис. 205 (стр. 105), приближённый. Некоторые же поверхности не могут быть развёрнуты на плоскости точно, без разрывов и складок, например сфера (поверхность шара). Эти поверхности называются *неразвёртывающимися*. Для них можно построить лишь приближённые развёртки. Склеивая приближённую развёртку, мы получим некоторую другую поверхность, близкую по форме к данной, но не вполне с ней совпадающую.

Рассмотрим некоторые способы приближённой развёртки сферы.

Очистить апельсин от кожуры можно следующим способом: разрезать её ножом по дугам больших кругов *) так, как проходят меридианы земного шара,

*) Большой круг—это сечение шара плоскостью, проходящей через его центр.

а затем отделить кожуру (рис. 209); при этом мы заметим, что каждый кусок кожуры не плоский, а выпуклый, и попытки сделать их плоскими увенчаются успехом лишь в том случае, если кожа достаточно эластична и нам удастся примять середину, слегка растянув при этом края; в противном случае кожа разорвётся.

Подобная развёртка сферы находит широкое практическое применение, например при оклейке поверхности глобуса.

Чем точнее хотим мы получить развёртку, тем на большее число частей следует разбить сферу. Разобьём её, например, на 12 равных частей (рис. 210). Каждая такая часть называется сферическим двугранником. Построим его.

Пусть радиус шара равен R . Длина большого круга этого шара равна $2\pi R$; одна двенадцатая его равна

$$\frac{2\pi R}{12} = \frac{\pi R}{6}.$$

Далее

$$AB = ab = \frac{\pi R}{6},$$

$$GI = gi = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Для нахождения промежуточных точек $C, D, E, F^*)$ развёртки проведём на шаре дуги cd, ef параллельно ab ; тогда каждый отрезок будет равен одной

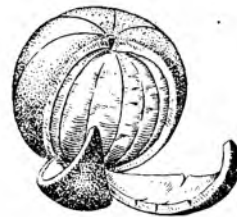


Рис. 209. «Развёртка» поверхности апельсина.

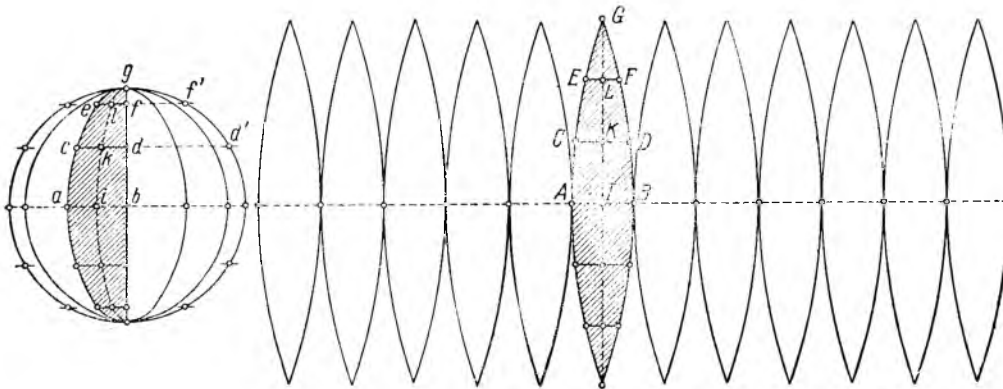


Рис. 210. Приближённая развёртка сферы.

двенадцатой длины соответствующего круга на шаре ($CD = cd, EF = ef$); радиусы этих кругов равны соответственно dd', ff' . Соединив плавными кривыми точки A, C, E и G, B, D, F и G и построив нижнюю часть этих кривых (по симметрии), получим одну часть развёртки; повторив её ещё 11 раз, получим приближённую развёртку сферы.

У п р а ж н е н и е. Постройте развёртку поверхности шара, разбив её на 16 одинаковых элементов, вырежьте и склейте её.

*) Число их также зависит от степени точности, с которой мы хотим построить развёртку.

Существуют и другие способы приближённой развёртки сферы, например оболочка теннисных мячей (рис. 211) составляется из двух одинаковых кусков,

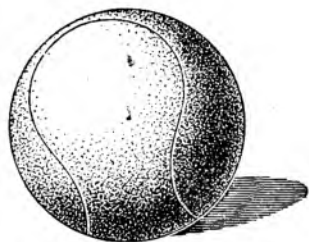


Рис. 211. Теннисный мяч.

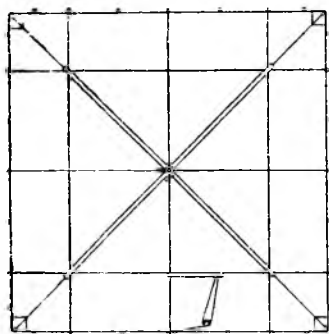
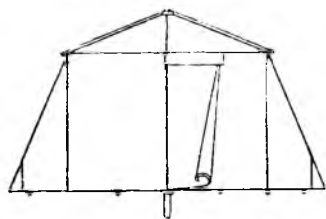


Рис. 212. «Развёртка» поверхности яблока.

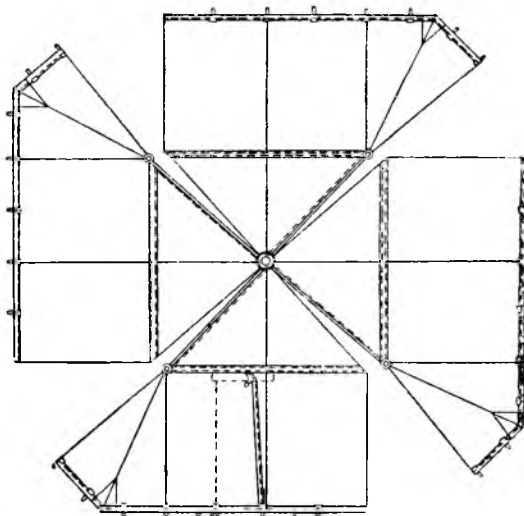
форма которых напоминает восьмёрку; кожура яблока (рис. 212) очищается ножом в виде полосы, имеющей форму «двойной спирали».

§ 72. Некоторые примеры развёрток

На рис. 213, а изображён эскиз типовой лагерной палатки. Палатка состоит из основной брезентовой части (намета), верёвочного прибора (оттяжек) и деревянного прибора (каркаса).



а)



б)

Рис. 213. Развёртка лагерной палатки.

Геометрическая форма нижней части палатки—правильная усечённая пирамида, а верхней части—правильная пирамида. Обе пирамиды имеют квадратные основания. Палатка шьётся из отдельных полотнищ ткани, образующих наклонные боковые стенки и четырёхскатную крышу.

На рис. 213, б показана развёртка палатки. Боковая поверхность квадратной пирамиды (крыши), как и следовало ожидать, образована четырьмя равными равнобедренными треугольниками.

Боковая поверхность усечённой квадратной пирамиды—четыре одинаковые равнобокие трапеции. В данном же случае эта поверхность представлена более сложными пятиугольными фигурами, потому что часть трапеции отнесена к смежному полотнищу.

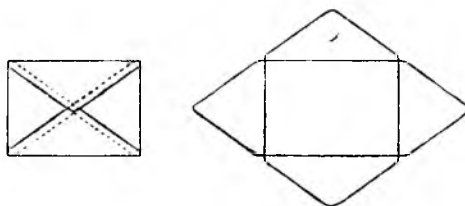


Рис. 214. Конверт.

Конверт можно рассматривать как четырёхугольную пирамиду с нулевой высотой. Конверт и его развёртка даны на рис. 214.

На рис. 215 изображена заготовка (развёртка) для папиросной коробки.



Рис. 215. Заготовка папиросной коробки.

У п р а ж н е н и е. Вычертите на плотной бумаге развёртку палатки (рис. 213), вырежьте её и склейте.

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ТЕЛ

§ 73. Что такое «плоское сечение»?

Перепилим лежащий горизонтально деревянный брус. При этом может быть один из четырёх случаев:

а) Плоскость пропила вертикальна и перпендикулярна к продольной оси бруса; в сечении получается прямоугольник (рис. 216, а).

б) Плоскость пропила вертикальна, но не перпендикулярна к продольной оси бруса; в сечении получается прямоугольник (рис. 216, б).

в) Плоскость пропила наклонна, но перпендикулярна к боковой грани бруса; в сечении получается тоже прямоугольник (рис. 216, в).

г) Плоскость пропила занимает произвольное («случайное») положение; в сечении получается параллелограмм (рис. 216, г).

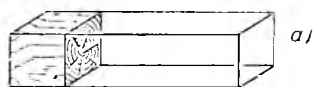


Рис. 216. Различные сечения прямоугольного бруса.

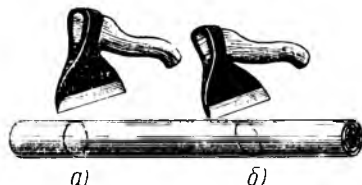


Рис. 217. Сечения круглой палки.

Перерубим топором круглую палку. Может быть один из двух случаев:

а) Палка перерублена перпендикулярно к её оси; в сечении получается круг (рис. 217, а).

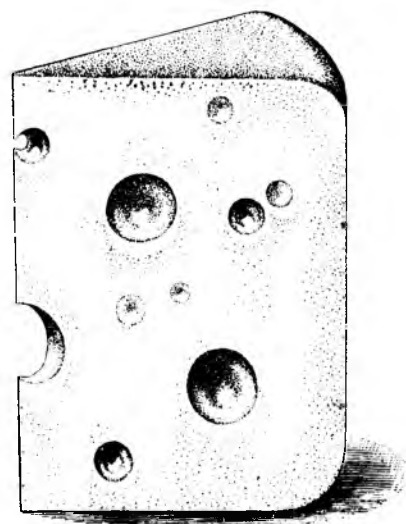


Рис. 218. Сечение сыра двумя плоскостями.

б) Палка перерублена не перпендикулярно к оси; в сечении получается эллипс (рис. 217, б).

Отрежем кусок сыра (рис. 218).

Во всех этих случаях мы, выражаясь геометрически, произвели *сечение* некоторого тела одной или двумя плоскостями.

Однако сечение в геометрическом смысле не всегда состоит в отрезывании («отсечении») или другом нарушении целостности тела.

На рис. 219 горизонтальная плоскость (свободная поверхность воды) пересекается с наклонной плоскостью (дном стакана); линией сечения плоскостей является прямая. Эта же горизонтальная плоскость пересекается с боковой поверхностью прямого кругового цилиндра (стенкой стакана); линией их сечения является часть эллипса.

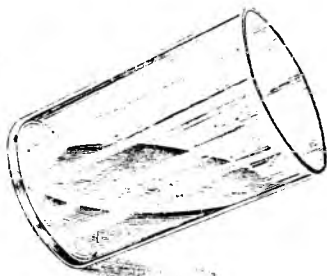


Рис. 219. Сечение поверхности стакана плоскостью поверхности воды.

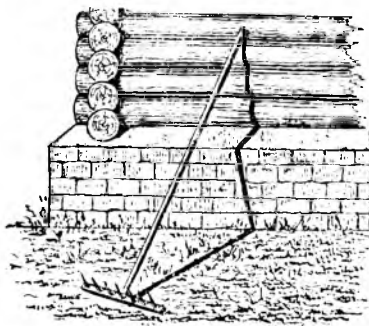


Рис. 220. Тень от граблей.

На рис. 220 плоскость тени, падающей от ручки граблей, пересекается с поверхностью стены дома по плоской линии, состоящей из прямолинейных и кривых звеньев.

При этих сечениях стакан и здание остаются совершенно целыми.

Всякое сечение взаимно. Надрежем яблоко (рис. 221) и оставим нож в яблоке; через некоторое время на лезвии ножа появится отпечаток сечения. При этом фигура отпечатка на ноже в точности та же, что и фигура сечения яблока.

Всякое пересечение является взаимным. По какой фигуре поверхность пересекала тело, по такой и тело пересекло поверхность.

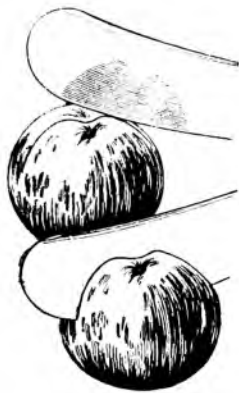


Рис. 221. Сечение взаимно.

§ 74. Сечения кругового цилиндра

Перейдем к изучению плоских сечений (иногда для краткости будем говорить просто «сечений») отдельных поверхностей. Начнем с сечений цилиндра.

Налейте в стакан немного воды. Геометрическая форма стакана—прямой круговой цилиндр*); свободная поверхность воды—горизонтальная плоскость.

Если стакан стоит на столе, то в сечении получается *круг* (рис. 222, а).

Наклоните немного стакан. Тогда образующие прямого кругового цилиндра будут наклонены к плоскости сечения и в сечении получится *эллипс* (рис. 222, б).



Рис. 222. Поверхность воды в стакане.

*) Приблизительно. Окружность дна стакана делается немного меньше окружности верхнего края стакана. Мы этого небольшого различия не будем учитывать и примем поверхность стакана за цилиндр.

Чем больше мы наклоним стакан, тем больше вытянется эллипс. Когда секущая плоскость заденет обе окружности оснований (рис. 222, в), то полученное сечение будет наибольшим для данного цилиндра и это сечение разделит объём цилиндра на две равные части. (Вот способ отмерить ровно пол-стакана воды!)

Если наклоним стакан дальше, вода будет выливаться. Поэтому надо расстаться со стаканом и перейти к геометрическому цилиндру, так как цилиндр

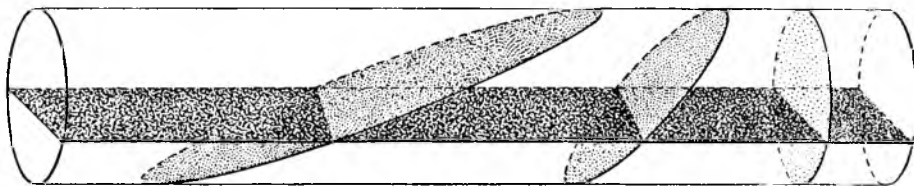


Рис. 223. Сечения цилиндра.

бесконечен, а стакан—это только отрезок цилиндра. Теперь будут получаться эллипсы сколь угодно вытянутой формы, и, наконец, может получиться пара параллельных прямых (рис. 223).

Итак, плоские сечения прямого кругового цилиндра (бесконечного)—всегда эллипсы (в частности, окружность) или пары прямых.

§ 75. Сечения кругового конуса

Возьмите стеклянную воронку (её геометрическая форма—*прямой круговой конус*) и погрузите её немного в воду так, чтобы ось её была отвесной—перпендикулярной к горизонтальной поверхности воды. Поверхность воды (т. е. плоскость) образует на конусе окружность (рис. 224, а). Если опустить воронку глубже (рис. 224, б), то сечение останется окружностью—изменится только её радиус.

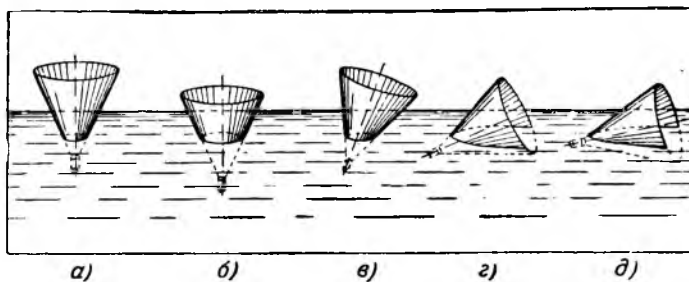


Рис. 224. Сечения конической воронки поверхностью воды.

Наклоните слегка воронку; тогда линия сечения конуса поверхностью воды станет вытягиваться и в сечении получится замкнутая кривая (рис. 224, в). Можно доказать, что это — *эллипс*.

Наклоним воронку дальше; эллипс будет растягиваться всё больше и больше до тех пор, пока одна из образующих конуса (самая нижняя) не станет параллельной поверхности воды (рис. 224, г). В результате получится незамкнутая кривая линия, она уже не является эллипсом.

Кривая, получаемая сечением прямого кругового конуса плоскостью, параллельной одной из его образующих, называется *параболой*. Она изображена отдельно на рис. 225. Вернее, это—часть параболы. Конус бесконечен, а воронка—только часть конуса.

Наклоняя воронку дальше (рис. 224, д), мы получим незамкнутые кривые, пересекающие не все образующие конуса. Эти кривые называются *гиперболами*.

Впрочем, на воронке нельзя получить полного представления о гиперболе. При таком положении, как на рис. 224, *б*, плоскость должна пересечь вторую полость конуса, которой у воронки нет. Это изображено на рис. 226. Надо помнить, что гипербола всегда состоит из двух частей, называемых *ветвями*.

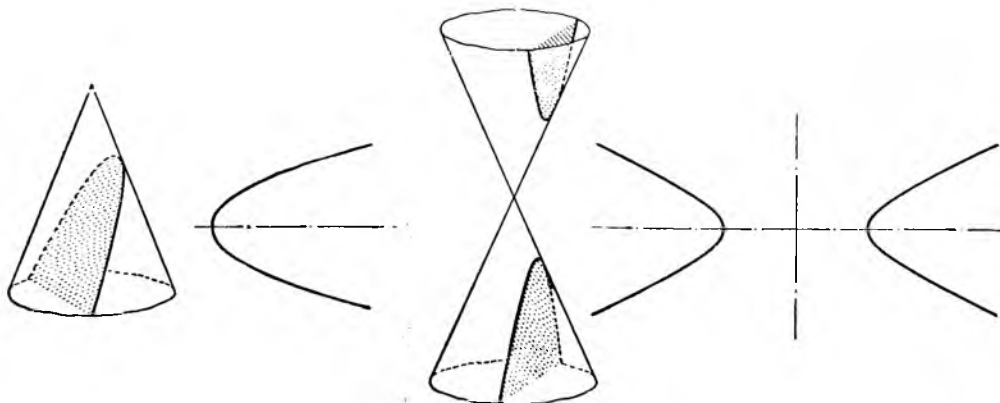


Рис. 225. Парабола.

Рис. 226. Гипербола.

Полученные три типа кривых—эллипс, парабола, гипербола—называются *коническими сечениями*.

В том случае, когда секущая плоскость проходит через вершину конуса, в сечении получатся две прямые линии—две образующие конуса (рис. 227, *а*).

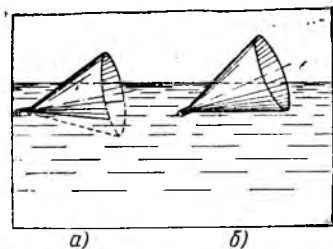


Рис. 227. Другие сечения конической воронки.

Угол между ними может быть различный—от нуля (когда плоскость только касается конуса и обе секции сливаются в одну, рис. 227, *б*) до угла осевого сечения (в случае, когда секущая плоскость проходит через ось конуса).

Укажем ещё один пример, где можно наблюдать конические сечения.

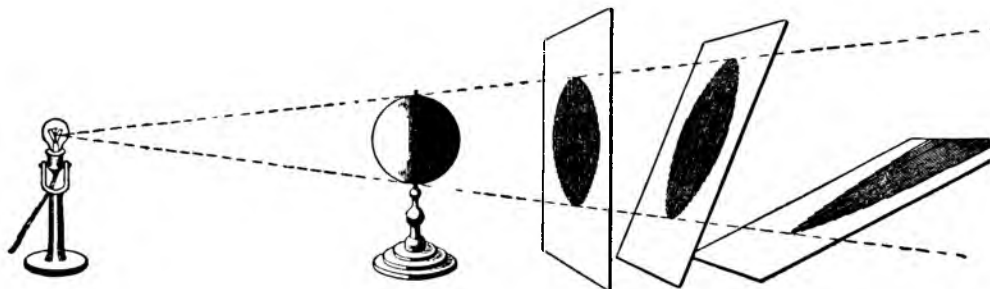


Рис. 228. Тени шара.

Поставьте на стол лампу и глобус (рис. 228); тогда конус отбрасываемой глобусом тени даст на куске картона изображение эллипса (в частности, круга),

параболы или гиперболы—в зависимости от того, каков будет угол наклона картона к оси конуса.

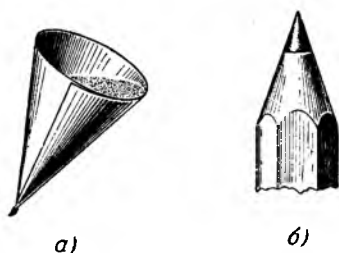


Рис. 229. Какие здесь конические сечения?

У п р а ж н е н и я. Какие кривые получаются при пересечении

1) конуса поставленного наклонно бумажного «фунтика» горизонтальной плоскостью—поверхностью насыпанной в него крупы (рис. 229, а)?

2) конуса отточенного машинкой карандаша его гранями (рис. 229, б)?

§ 76. Сечения призмы и пирамиды проектирующими плоскостями

До сих пор мы рассматривали плоские сечения *поверхностей*. В практике изображений часто приходится иметь дело со *сплошными телами*, в которых сделан разрез (действительный или воображаемый) по некоторой плоскости. В этом параграфе будет рассмотрен простейший случай: сечения призмы и пирамиды *проектирующими плоскостями*. В § 77 вместо проектирующих плоскостей будут взяты плоскости *общего положения*.

Найдём линию сечения прямой треугольной призмы, стоящей на горизонтальной плоскости проекций, другой горизонтальной плоскостью P (рис. 230, а).

Совершенно очевидно, что плоскость P , параллельная основанию призмы, пересекает только боковые грани призмы и даёт в сечении такой же треугольник ABC , какой лежит в основании призмы. Его стороны проектируются на плоскость H прямо на стороны треугольника основания (рис. 230, б), и на чертеже их вычерчивать не приходится—достаточно пометить вершины буквами a, b и c . Вертикальная проекция тоже не требует построений: она «сжалась» в отрезок $a'b'c'$.

Итак, никаких построений нам делать не пришлось. Искомый треугольник выделен на рис. 230, б жирными линиями.

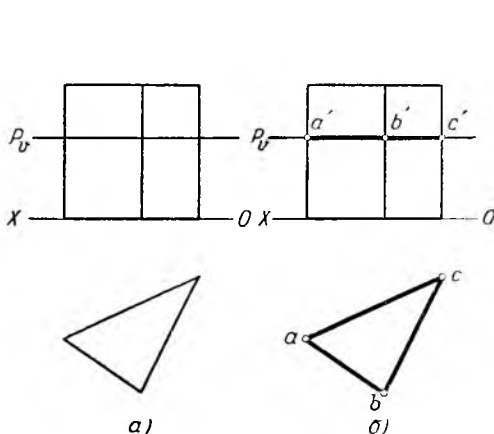


Рис. 230. Сечение прямой треугольной призмы горизонтальной плоскостью.

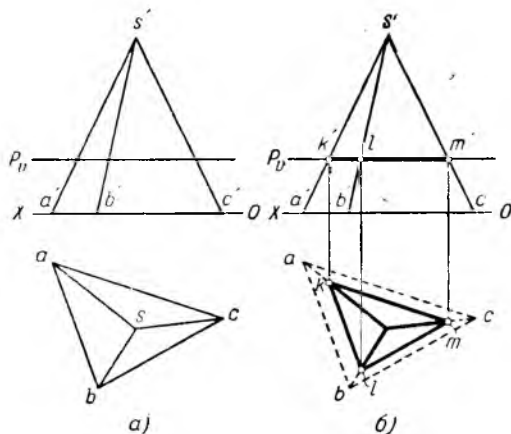


Рис. 231. Сечение треугольной пирамиды горизонтальной плоскостью.

Построим линию сечения треугольной пирамиды, стоящей на плоскости H , горизонтальной плоскостью P (рис. 231, а).

Как и в предыдущем случае, вертикальная проекция искомого сечения KLM уже имеется на чертеже в готовом виде, это $k'l'm'$ (рис. 231, б). Поскольку точки K, L и M лежат на боковых рёбрах SA, SB и SC пирамиды, горизонтальные их проекции мы найдём, снеся вниз точки k', l', m' на горизонтальные проекции этих рёбер. Треугольник klm и представляет собой горизонтальную проекцию сечения. Заметим, что треугольник klm подобен треугольнику abc .

Рассмотрим сечение треугольной пирамиды, стоящей на плоскости H , вертикально-проектирующей плоскостью P (рис. 232, а).

Читатель легко разберётся в построении сечения по чертежу 232, б.

Эта задача отличается от предыдущих также и тем, что плоскость P пересекает не только боковые грани, но и нижнее основание пирамиды (именно—по отрезку KL). Ребро SA с плоскостью P совсем не встречается. (Мы здесь понимаем ребро как отрезок; прямая же SA встречается с плоскостью P , но точка встречи лежит вне отрезка SA .) Рёбра SB и SC встречаются плоскость P соответственно в точках M и N ; искомая линия сечения — $KNML$.

Упражнение. Постройте линии сечения тел плоскостями (рис. 233).

§ 77. Сечение призмы и пирамиды произвольной плоскостью

В рассмотренных примерах плоскость сечения была перпендикулярна к одной из плоскостей проекций. Задача нахождения линии сечения облегчалась тем, что одна из проекций искомой линии целиком лежала на следе секущей плоскости.

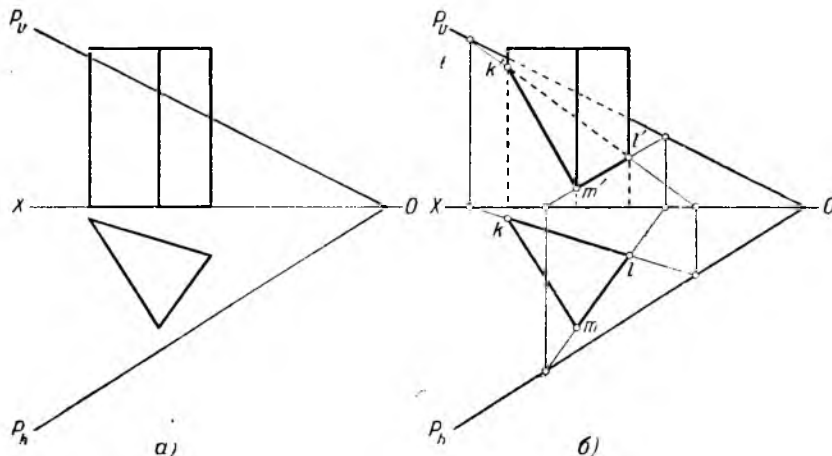


Рис. 232. Сечение треугольной пирамиды вертикально-проектирующей плоскостью.

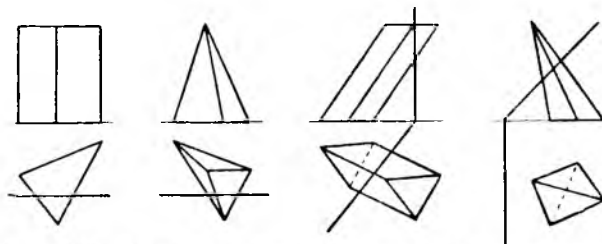


Рис. 233. Постройте сечения этих тел указанными плоскостями.

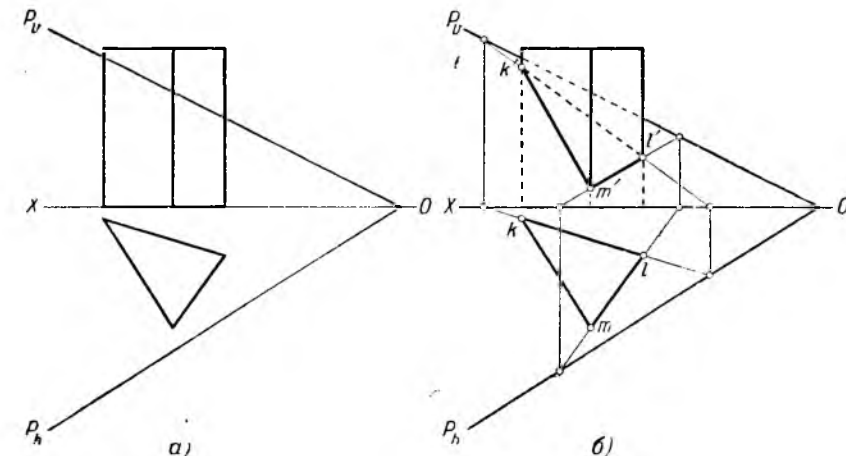


Рис. 234. Сечение прямой треугольной призмы произвольной плоскостью.

Рассмотрим теперь общий случай. Построим линию сечения прямой призмы, стоящей на плоскости H , произвольной (случайной) плоскостью P (рис. 234, а).

И в данном случае задача частично решается без всяких построений: так как грани призмы вертикальны, то любая лежащая на этих гранях линия, в том числе и искомая линия сечения призмы плоскостью P , проектируется на H только на стороны треугольника оснований. Поэтому можно сразу отметить точки k , l и m —горизонтальные проекции вершин искомой линии сечения (рис. 234, б).

Остаётся найти вертикальные проекции точек K , L и M . Рассуждаем так: прямая KL лежит в плоскости P ; горизонтальная проекция kl прямой KL известна. Найти её вертикальную проекцию $k'l'$ нетрудно.

Аналогично по ml находим $m'l'$. (Тот факт, что положения точки l' совпали при обоих построениях, указывает на точность выполнения построений.)

Осталось соединить точки k' и m' . Сечение KLM построено.

Дана пирамида $SABC$, стоящая на плоскости H , и произвольная плоскость P (рис. 235, а). Построим линию сечения.

Искомая фигура может быть получена путём последовательного построения отрезков, по которым грани пирамиды пересекаются с плоскостью P ; каждый из этих отрезков найдём по его концам—по точкам, в которых рёбра SA , SB и SC пирамиды встречают плоскость P .

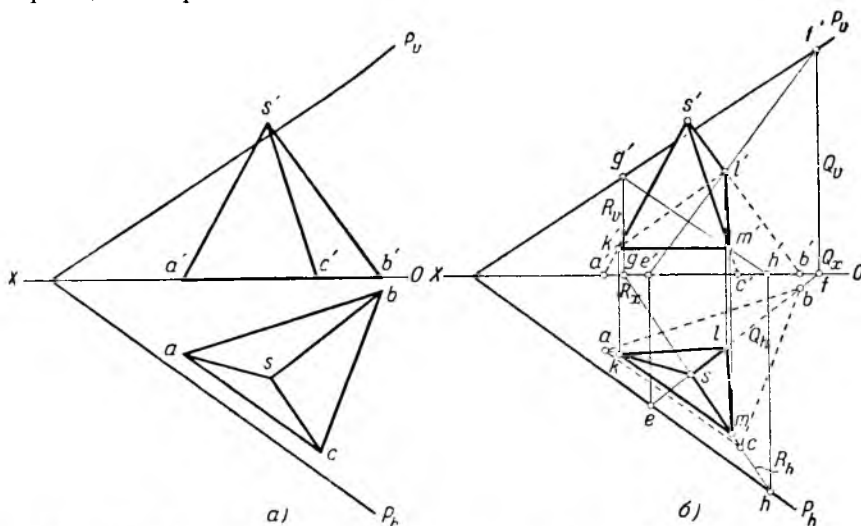


Рис. 235. Сечение треугольной пирамиды произвольной плоскостью.

Для отыскания точки встречи ребра SB с плоскостью P проведём (рис. 235, б) через SB горизонтально-проектирующую плоскость Q . Горизонтальный след вспомогательной плоскости (Q_h) совпадает с горизонтальной проекцией sb ребра SB ; вертикальный же её след (Q_v) перпендикулярен к оси OX ; поэтому продолжим Q_h (он же sb) до оси OX и из точки схода следов Q_x проведём Q_v перпендикулярно к OX . Пересечение горизонтальных следов P_h и Q_h плоскостей P и Q определяет точку E —горизонтальный след прямой пересечения плоскостей P и Q ; аналогично, пересечение вертикальных следов P_v и Q_v тех же плоскостей определяет точку F —вертикальный след этой же прямой.

Мы получили вспомогательную прямую EF , лежащую в одной вертикальной плоскости Q с ребром SB . Эти две прямые пересекаются в точке, которую обозначим L . Вертикальная проекция l' этой точки находится на пересечении вертикальных проекций ребра SB и линии сечения P и Q ; для получения горизонтальной проекции l этой точки сносим l' вниз перпендикулярно к OX до пересечения с sb . Таким образом, точка L встречи ребра SB с плоскостью P найдена.

Аналогично находим точку M —точку встречи ребра SC с секущей плоскостью P —при помощи вспомогательной вертикальной плоскости R .

Соединив точки L и M , получаем отрезок LM —пересечение треугольной пластинки SBC с плоскостью P .

Дальше—в общем случае—следует найти точку встречи ребра SA с P при помощи третьей вспомогательной вертикальной плоскости, проведённой через SA . В данной конкретной задаче ac параллельно P_h . Но ac —это AC , т. е. горизонтальный след плоскости SAC ; следовательно, горизонтальные следы плоскостей SAC и P параллельны друг другу. В этом случае плоскости SAC и P либо параллельны, либо пересекаются по линии, параллельной их горизонтальным следам. Но параллельными эти плоскости быть не могут, так как имеют общую точку (M). Значит, линия сечения этих плоскостей параллельна P_h и AC .

Проведя через m прямую mk параллельно P_h до пересечения с sa , получим горизонтальную проекцию линии сечения MK . Вертикальную проекцию k' находим, снеся k вверх на $a's'*$.

Соединив K с L (т. е. k с l и k' с l'), получаем KLM —искомое сечение пирамиды $SABC$ плоскостью P .

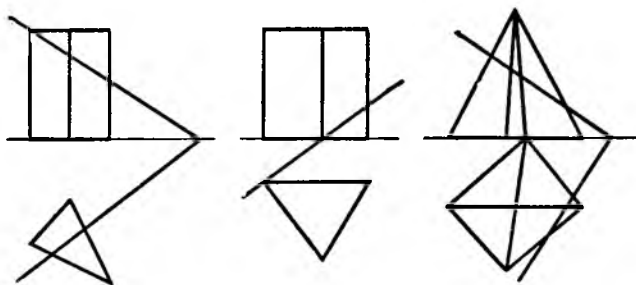


Рис 236. Постройте сечения изображённых тел указанными плоскостями.

Упражнение. Построить плоские сечения тел (рис. 236).

§ 78. Определение видимых и невидимых элементов

В предыдущих параграфах мы рассматривали тела и плоскости как прозрачные. Практически приходится иметь дело с непрозрачными телами; поэтому на самом деле не все элементы будут видимыми.

Вернёмся к рисунку 231, б (стр. 114). На вертикальной проекции ни плоскость P не закрывает пирамиды, ни пирамида не закрывает плоскости P ; равным образом все три боковых ребра пирамиды—видимые; поэтому все линии—сплошные. Обратимся к горизонтальной проекции.

Если плоскость P —непрозрачная, то при рассматривании сверху мы будем видеть только ту часть пирамиды, которая находится над плоскостью P . Исходя из этого, на горизонтальной проекции пирамиды (рис. 231, б) отрезки, находящиеся выше плоскости P , вычерчены сплошными линиями, а находящиеся ниже этой плоскости—пунктирными.

На рис. 232, б (стр. 115) на вертикальной проекции все элементы—видимые. На горизонтальной же есть и невидимые; какие именно и почему—предоставляется установить читателю.

На рис. 234 (стр. 115) на горизонтальной проекции все элементы **видимые** (почему?), а на вертикальной—не все.

*) Иногда случайные особенности задания помогают значительно упростить решение задач; поэтому не следует решать задачи по шаблону, а надо всегда стремиться найти индивидуальные особенности данного задания.

На рис. 237 для наглядности показана та же призма, что и на рис. 234 (стр. 115), только верхняя её часть, отсечённая плоскостью, немного приподнята, и на вертикальной проекции видно само сечение (заштриховано).

Иногда бывает нужно не только построить проекции сечения, но и определить его истинный вид. Для сечения призмы, изображённой на рисунках 234 и 237, это сделано на рис. 238.

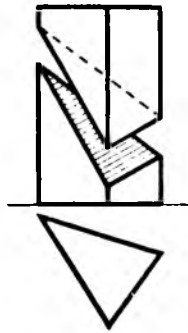


Рис. 237. Призма, изображённая на рис. 234 (отсечённая часть приподнята).

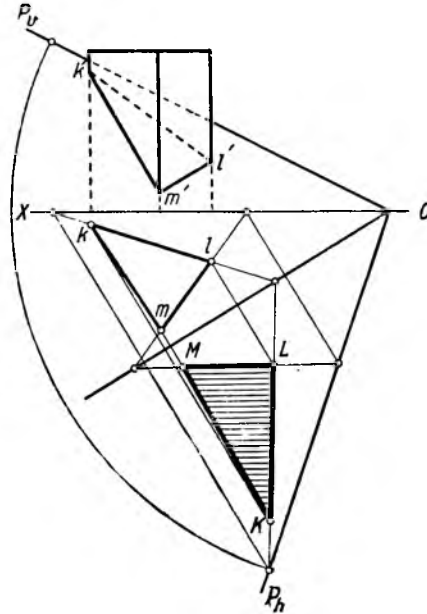


Рис. 238. Определение истинной величины сечения треугольной призмы плоскостью.

У п р а ж н е н и е. Выделить видимые элементы на эпюрах (рис. 235 и 236). Определить в каждом случае истинный вид сечения.

§ 79. Сечения тел вращения

До сих пор мы рассматривали сечения многогранников. Перейдём к телам, ограниченными кривыми поверхностями.

Рассмотрим сначала три простые задачи.

1. Построим сечение прямого кругового цилиндра, стоящего на плоскости H , горизонтальной плоскостью P (рис. 239).

Эта задача аналогична задаче о сечении прямой призмы на рис. 230 (стр. 114).

2. Построим линию сечения прямого кругового конуса, стоящего на плоскости H , горизонтальной плоскостью Q (рис. 240).

Эта задача не отличается по существу от задачи о сечении пирамиды на рис. 231.

3. Построим сечение тела вращения (меридиан KL , ось MN) горизонтальной плоскостью P (рис. 241).

Построение получающегося в сечении круга ясно из чертежа.

У п р а ж н е н и е. Постройте сечение шара горизонтальной плоскостью (рис. 242).

Перейдём теперь к более сложным задачам.

4. Построим сечение прямого кругового цилиндра, стоящего на плоскости H , наклонной плоскостью R , перпендикулярной к плоскости V (рис. 243). Из § 74 мы знаем, что это — эллипс; построим его проекции.

Очевидно, горизонтальная проекция искомой линии сечения есть окружность, совпадающая с горизонтальной проекцией боковой поверхности цилиндра; вертикальная проекция той же линии — отрезок $a'b'$ прямой R_v . Эти две проекции, однако, не дают представления об истинном виде линии сечения.

Для нахождения истинного вида линии сечения совместим плоскость R с H , повернув её около горизонтального следа R_h , и по 12 точкам на проекциях получим 12 точек сечения в совмещённом положении. Соединив их плавной кри-

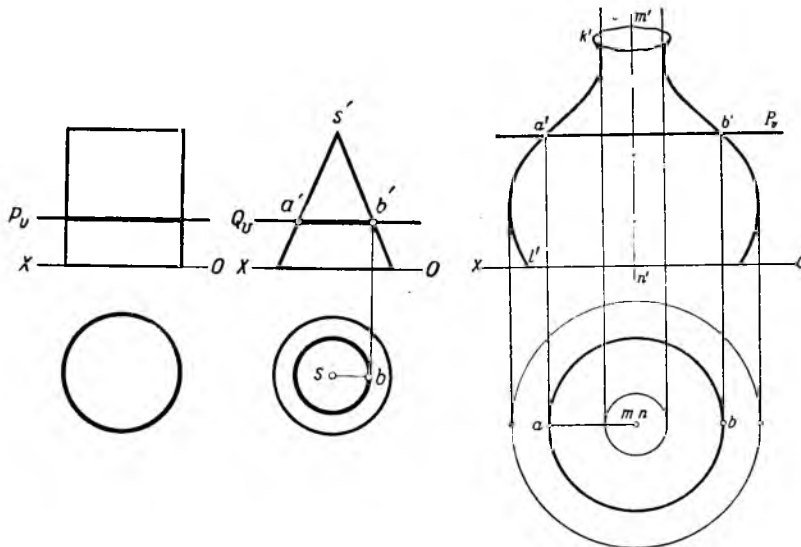


Рис. 239. Сечение прямого кругового цилиндра горизонтальной плоскостью.

Рис. 240. Сечение прямого кругового конуса горизонтальной плоскостью.

Рис. 241. Сечение поверхности вращения горизонтальной плоскостью.

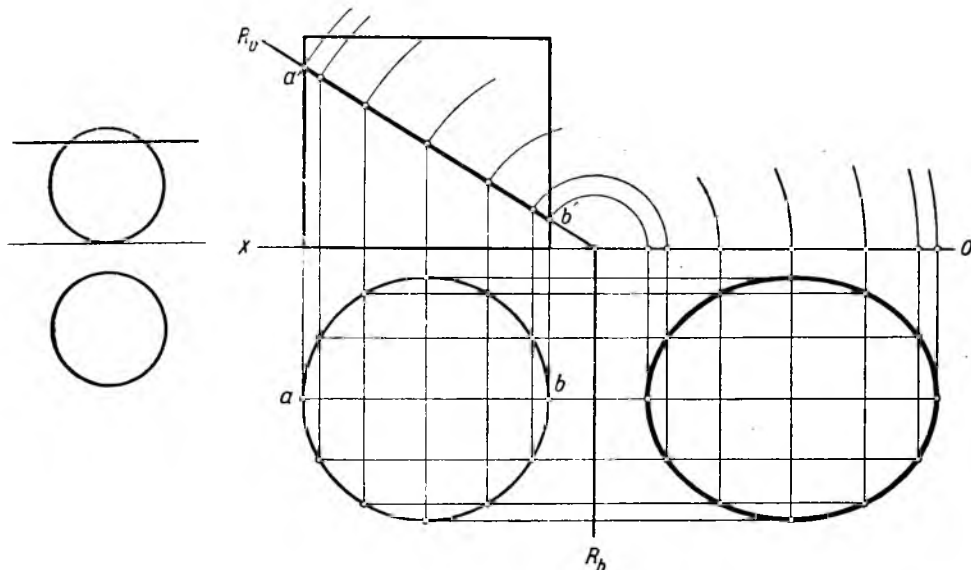


Рис. 242. Постройте сечение шара горизонтальной плоскостью.

Рис. 243. Сечение прямого кругового цилиндра вертикально-проектирующей плоскостью.

вой, получим эллипс—искомую линию сечения кругового цилиндра плоскостью, наклонной к его образующим.

У п р а ж н е н и е. Постройте развёртку боковой поверхности кругового цилиндра и нанесите на неё линию сечения цилиндра плоскостью; полученная на развёртке линия сечения—*синусоида*.

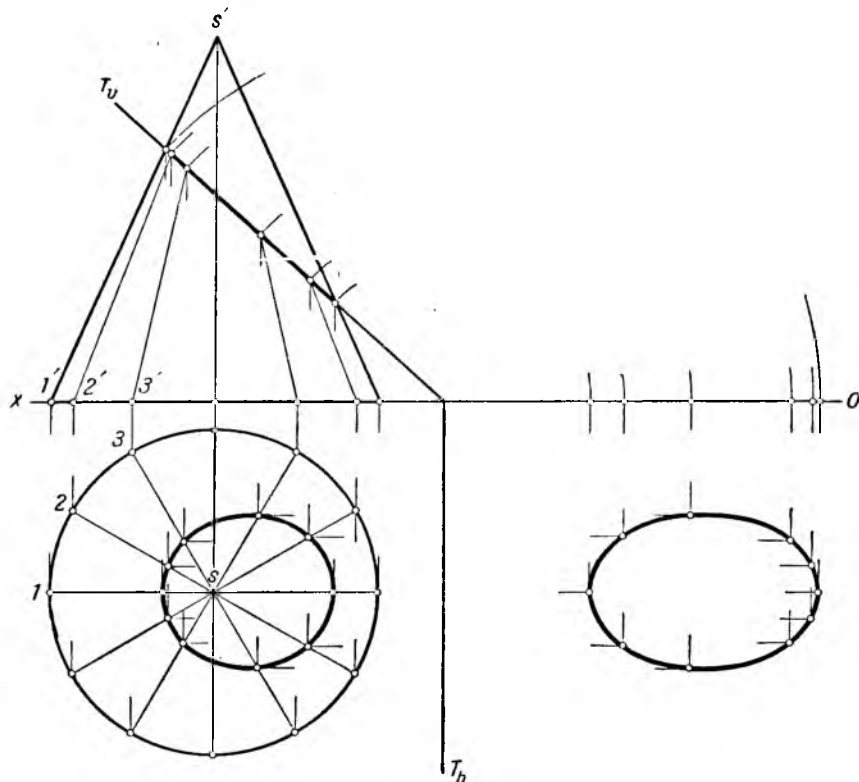


Рис. 244. Сечение прямого кругового конуса вертикально-проектирующей плоскостью.

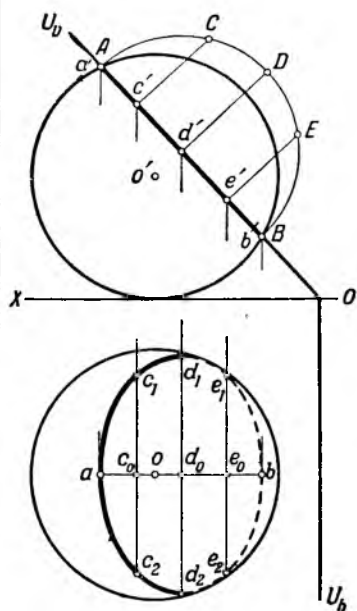


Рис. 245. Сечение шара вертикально-проектирующей плоскостью.

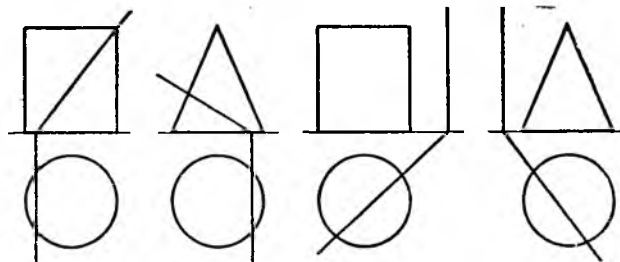


Рис. 246. Постройте сечения тел плоскостями.

5. Построим сечение прямого кругового конуса, стоящего на плоскости H , наклонной плоскостью T , перпендикулярной к плоскости V (рис. 244).

Вертикальная проекция искомой линии сечения—отрезок следа T_v , заключённый между проекциями крайних образующих конуса. Горизонтальную проекцию линии сечения строим по отдельным точкам, для чего предварительно проведём несколько вспомогательных образующих $S-1$, $S-2$, $S-3$, ... Читатель без труда проследит по рис. 244 за построением этих точек. Истинный вид линии сечения получаем, совместив плоскость T с H так же, как и в предыдущей задаче.

6. Построить линию сечения шара плоскостью U , перпендикулярной к плоскости V (рис. 245). Сечение шара плоскостью всегда круг, поэтому форму линии сечения мы знаем заранее. Вертикальную проекцию $a'b'$ искомой линии сечения находим без всякого построения; диаметр искомой окружности равен $a'b'$. Существенное отличие данной задачи от обеих предыдущих состоит в том, что мы по вертикальной проекции $a'b'$ сечения сразу можем найти её истинный вид (на эшпоре начерчена полуокружность $ACDEB$) и лишь затем— её горизонтальную проекцию $ac_1d_1e_1be_2d_2c_2$. Построения ясны из чертежа ($c_0c_1 = c_0c_2 = c'C$; $d_0d_1 = d_0d_2 = d'D$ и т. д.).

У п р а ж н е н и е. Построить проекции и найти истинный вид линий сечения цилиндра и конуса плоскостями, перпендикулярными к одной из плоскостей проекций (рис. 246).

§ 80. Пересечение многогранника прямой линией

В дальнейшем мы будем рассматривать сечения многогранников плоскими пластинками и взаимное пересечение двух многогранников. Для этого надо будет исследовать сечения многогранника сторонами плоской пластинки или рёбрами другого многогранника. Поэтому предварительно решим вспомогательную задачу: *найти пересечение многогранника прямой линией*.

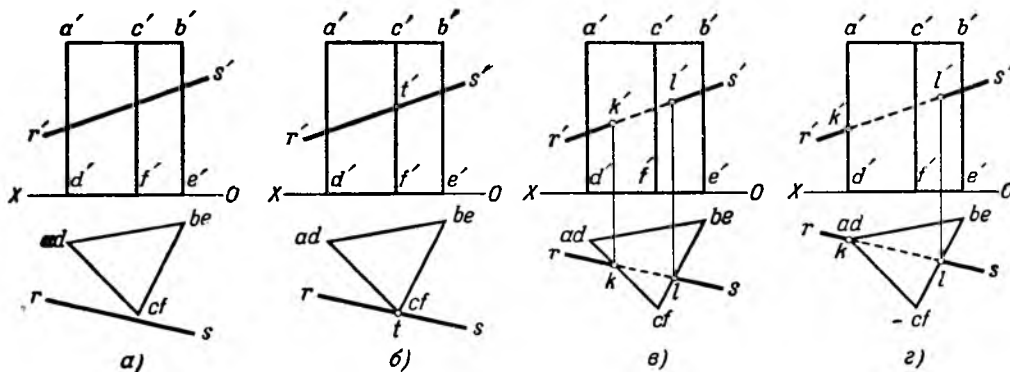


Рис. 247. Пересечение прямой призмы с прямой линией.

На рис. 247 даны прямая треугольная призма $ABCDEF$, стоящая на плоскости H , и прямая RS . Рассмотрим различные случаи положения этой прямой относительно призмы, перемещая прямую параллельно самой себе в плоскости, перпендикулярной к V . При этом вертикальная проекция прямой останется без изменения—будет перемещаться лишь горизонтальная проекция.

Поскольку грани призмы вертикальны, горизонтальные проекции призмы и прямой говорят нам сразу об относительном расположении прямой и призмы.

а) На горизонтальной проекции ясно видно, что прямая проходит вне призмы. Призма и прямая общих точек не имеют.

б) На горизонтальной проекции видно, что прямая пересекается с ребром CF или с его продолжением. Перейдя к вертикальной проекции, видим, что прямая RS пересекается с ребром в точке T . Призма и прямая имеют одну общую точку, именно—точку T (прямая задевает призму).

в) На горизонтальной проекции видно, что прямая RS пересекает грани $ACFD$ и $CBEF$ призмы или их продолжения. Вертикальные же проекции прямой и призмы показывают, что прямая RS пересекает боковые грани $ACFD$ и $CBEF$ призмы в точках K и L . Отрезок KL прямой RS лежит внутри призмы.

г) Прямая RS встречается в точке K ребро AD призмы, а в точке L —грань $CBEF$ призмы. Отрезок KL прямой RS лежит внутри призмы.

В приведённом примере было очень легко найти точки пересечения прямой линии призмой, потому что призма была прямая. В общем же случае задача несколько сложнее. Общий метод нахождения точки встречи прямой с многогранником состоит в проведении через данную прямую вспомогательной плоскости и построении линии сечения граней многогранника со вспомогательной плоскостью. Искомые точки встречи прямой с гранями находятся на пересечении данной прямой с найденными линиями сечения граней со вспомогательной плоскостью.

Рассмотрим пример—найдем пересечение прямой PQ с пирамидой $SABC$ (рис. 248).

Проведём через прямую PQ вспомогательную плоскость R , перпендикулярную к V ; следовательно, R_v сливается с прямой $p'q'$.

Эта вспомогательная плоскость пересечёт рёбра пирамиды в точках A_1 , B_1 , C_1 , вертикальные проекции которых не требуют построений. Сносим эти проекции a'_1 , b'_1 , c'_1 вниз на горизонтальные проекции соответствующих рёбер; получаем горизонтальные проекции a_1 , b_1 , c_1 . Итак, мы нашли обе проекции треугольника $A_1B_1C_1$ —сечения пирамиды вспомогательной плоскостью R . Прямая PQ лежит в плоскости этого треугольника. Следовательно,

Рис. 248. Пересечение пирамиды с прямой линией.

но, точки пересечения прямой PQ с контуром этого треугольника и являются искомыми точками пересечения PQ и пирамиды. Это—две точки X и Y ; сначала мы находим их горизонтальные проекции x и y , а затем сносим вверх на прямую $p'q'$.

Искомые точки найдены. Прямая PQ пересекает две грани пирамиды: ASB и ASC . Если бы прямая PQ совсем не встречала пирамиды или только задевала её, то это выяснилось бы в процессе построения.

Осталось выделить видимые элементы. Поскольку мы установили, что прямая PQ пересекает грани ASB и ASC , а эти обе грани видимы на горизонтальной проекции, то здесь будут видимы и обе точки встречи X и Y . Прямая PQ видна целиком, за исключением отрезка XY , который проходит внутри пирамиды; этот отрезок на горизонтальной проекции следует чертить штриховой линией или не чертить совсем. На вертикальной же проекции точка y' лежит в невидимой грани ASC и, следовательно, не видна. Весь отрезок $x'y'$ на вертикальной проекции невидим и потому вычерчен штриховой линией.

У п р а ж н е н и я . 1. Найти точки пересечения прямой с призмой в пяти случаях (рис. 249).

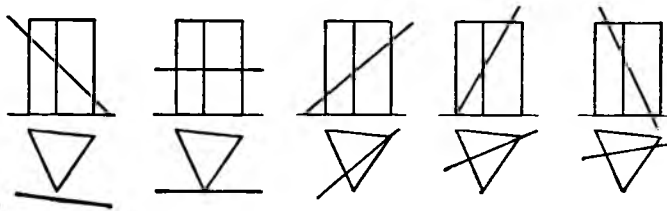


Рис. 249. Найдите пересечение прямой призмы с прямой линией.

2. Решить задачу на пересечение пирамиды прямой линией (рис. 248), пользуясь не вертикально-проектирующей, а горизонтально-проектирующей плоскостью.

§ 81. Пересечение треугольной пластинки с призмой и пирамидой

В §§ 76 и 77 рассматривались сечения призмы и пирамиды плоскостью. Секущая плоскость предполагалась неограниченной. Иногда приходится иметь дело с материальной пластинкой, врезающейся в тело (например, лезвие ножа). Допустим для простоты, что эта пластинка треугольная.

Построить сечение прямой треугольной призмы $ABCDEF$ треугольной пластинкой KLM (рис. 250, а).

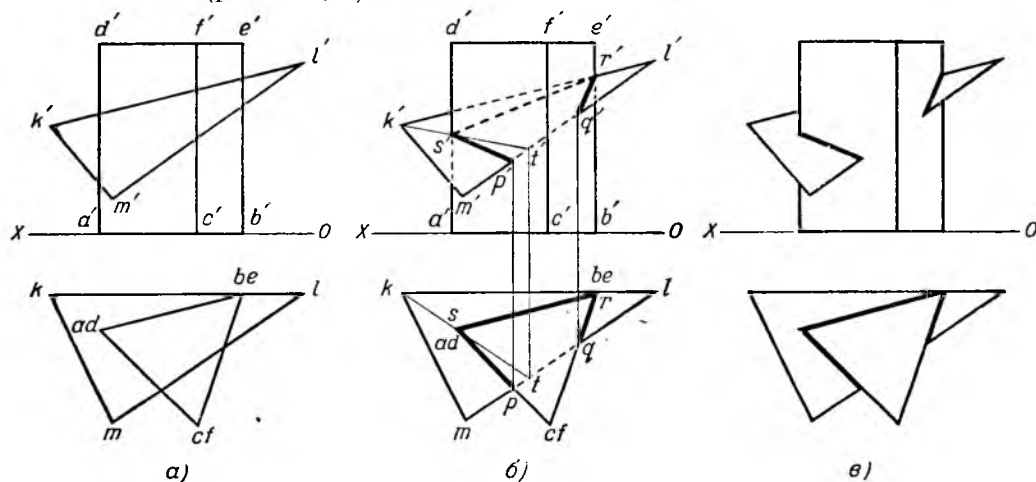


Рис. 250. Сечение прямой призмы треугольной пластинкой.

На вертикальной проекции видно, что треугольник KLM пересекает лишь боковые грани призмы, не пересекая её оснований. Но боковые грани призмы вертикальны; следовательно, горизонтальная проекция всякой линии, расположенной на боковой грани этой призмы, в том числе и искомой линии сечения, совпадает с горизонтальной проекцией боковой грани или может являться её частью.

Отметив (рис. 250, б) точки p и q (горизонтальные проекции точек встречи стороны ML с гранями призмы), получаем ломаную $psrq$ —горизонтальную проекцию искомой линии сечения.

Нахождение вертикальной проекции читатель сам разберёт по чертежу.

Остаётся соединить точки p' , s' , r' и q' , и обе проекции построены.

Определим видимые и невидимые элементы. На горизонтальной проекции все элементы—видимые, за исключением части pq стороны ml треугольника, потому что pq находится внутри призмы. Что же касается в е р т и

кальной проекции, то из рассмотрения горизонтальной проекции можно заключить, что грань $ABED$ призмы—вместе с лежащей на ней частью SR линии сечения—невидима; эта же грань заслоняет и делает невидимой и часть стороны KL . Точки P и Q —видимые, так как они расположены на видимых гранях $ACFD$ и $BCFE$. Часть $KSPM$ треугольника прикрывает частично ребро AD ; аналогично треугольник RLQ частично прикрывает ребро EB .

Окончательный результат изображён на рис. 250, в.

Рассмотрим ещё сечение треугольной пирамиды $SABC$ треугольной пластинкой KLM (рис. 251).

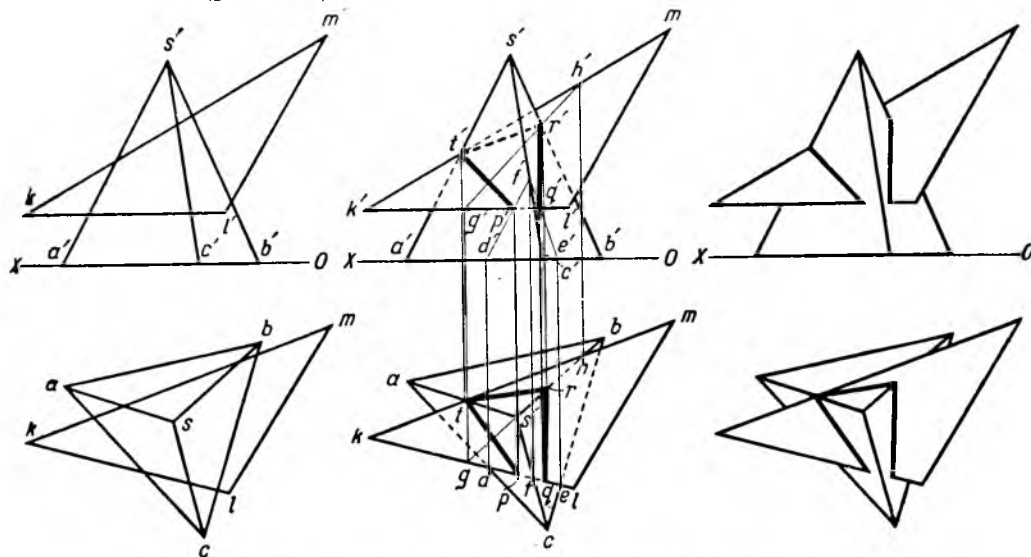


Рис. 251. Сечение пирамиды треугольной пластинкой.

Когда секущая плоскость была неограниченной (рис. 235 на стр. 116), то вам достаточно было найти только три точки пересечения рёбер пирамиды с этой плоскостью; соединив их, мы получали линию сечения.

Теперь дело обстоит сложнее. Необходимо найти не только точки пересечения рёбер пирамиды с треугольником, но и точки пересечения с т о р о н и треугольника с г р а н я м и пирамиды.

Найдём последовательно все точки встречи: 1) сторон треугольника с гранями пирамиды и 2) рёбер пирамиды с треугольником.

Прямая KL пересекает грань SAC в точке P и грань SBC —в точке Q . Эти точки оказались в н у т р и соответственных граней и в н у т р и отрезка KL . Если бы так не получилось, мы бы эти точки отбросили как не представляющие интереса.

Вторая сторона KM треугольника «задевает» пирамиду по ребру SA в точке T .

Третья сторона LM треугольника с пирамидой не пересекается.

Теперь нужно определить точки встречи рёбер пирамиды с плоскостью треугольника. Одна из этих точек уже определена, это—та же точка T ребра SA . Остаётся определить точки встречи двух других рёбер пирамиды с треугольником KLM .

Рассмотрим ребро SB ; проведём через него вспомогательную вертикальную плоскость; эта плоскость пересекает стороны KL и KM треугольника в точках G и H ; прямая GH —линия сечения вспомогательной плоскости с треугольником KLM ; точка R —пересечение GH с SB —и есть точка встречи ребра SB с плоскостью треугольника KLM .

Третье ребро SC пирамиды с треугольником, очевидно, не встречается; следовательно, искомая линия пересечения определяется этими четырьмя точками: P , Q , R и T .

Как соединить эти точки?

Точка T лежит на ребре SA ; следовательно, она принадлежит как грани SAB , так и грани SAC . Точка R лежит на ребре SB ; следовательно, она принадлежит как грани SBA , так и грани SBC . Точка P лежит на грани SAC , точка Q лежит на грани SBC . Записываем это:

Точка	На каких гранях пирамиды лежит		
T	SAB	SAC	
R	SAB		SBC
P		SAC	
Q			SBC

Соединять нужно такие пары точек, которые лежат в одной грани пирамиды; тогда полученный отрезок и даст пересечение этой грани с треугольной пластинкой. Поэтому соединяем: 1) P с T , 2) T с R , 3) R с Q .

Точку Q следовало бы соединить с точкой P , замкнув ломаную. Но из чертежа очевидно, что часть PQ стороны KL треугольника лежит внутри пирамиды $SABC$ и, следовательно, она невидима.

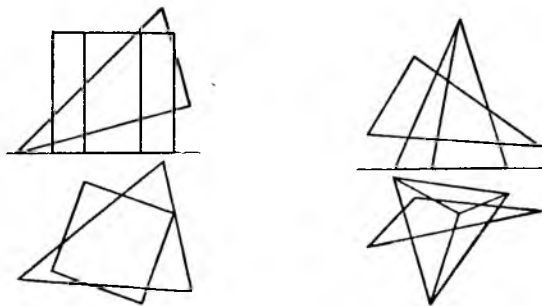


Рис. 252. Постройте сечения призмы и пирамиды треугольными пластинками.

У п р а ж н е н и е. Постройте сечения призмы и пирамиды треугольными пластинками (рис. 252).

ГЛАВА XI ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

§ 82. Понятие о пересечении двух тел

Рассмотрим деревянный сруб для избы или для колодца (рис. 253). По углам сруба пересекаются перпендикулярные брёвна, образующие две соседние стены. Но два тела не могут занимать одно и то же место. В местах их пересечений одно уступает место другому: близ концов брёвен делаются врубки.

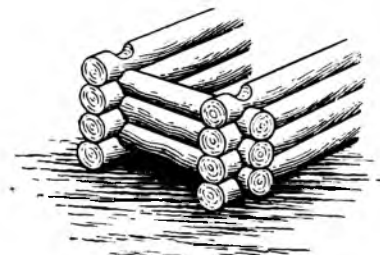


Рис. 253. Сруб.

На столе лежит платяная щётка. Возьмите в руку другую щётку. В положении, изображённом на рис. 254, а щётки не имеют ни одной общей точки.

Прикоснитесь одной щёткой к другой (рис. 254, б). Теперь щётки имеют одну общую точку.

Нажмите немного на щётку (рис. 254, в). Одна щётка проникла в другую. Щётки имеют общую часть—многогранник, два ребра которого видны на рисунке.

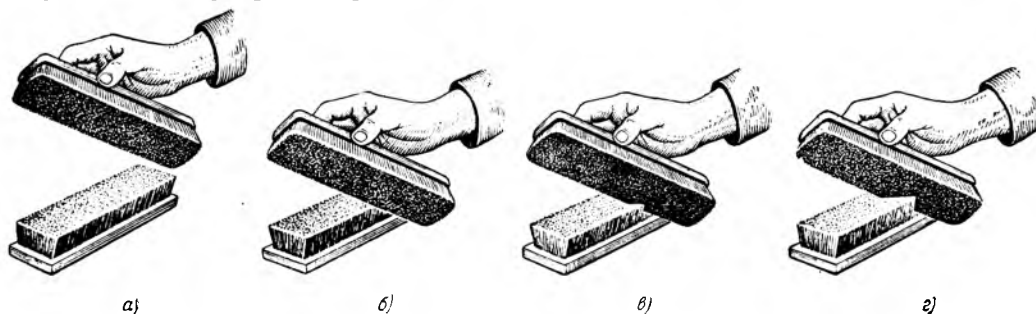


Рис. 254. «Пересечение» двух щёток.

Нажмите на щётку сильнее (рис. 254, г). Щётки глубже проникли одна в другую. Их общая часть увеличилась.

§ 83. Простейший случай пересечения многогранников

На рис. 255, а дана прямая треугольная призма, стоящая на плоскости H , а на рис. 255, б—треугольная пирамида. Станем передвигать пирамиду параллельно самой себе (т. е. так, чтобы любое из её рёбер оставалось параллельным своему прежнему положению), и рассмотрим различные случаи положения пирамиды относительно призмы.

1) Призма и пирамида не имеют общих точек (рис. 255, в). На вертикальной проекции одно из рёбер призмы частично невидимо—его закрывает кончик пирамиды.

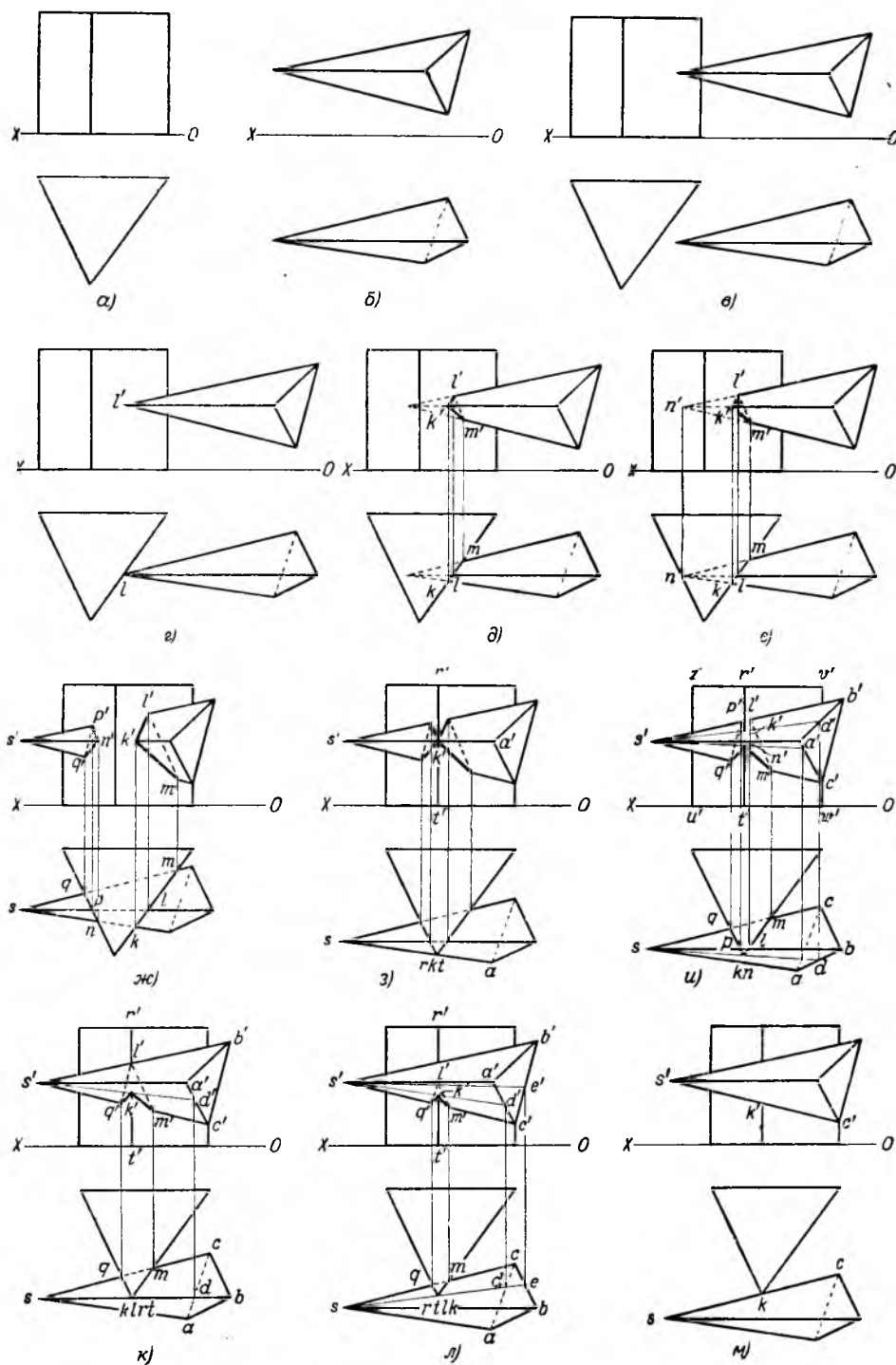


Рис. 255. Пересечение прямой призмы и пирамиды.

2) Призма и пирамида имеют одну общую точку L (рис. 255, $г$).

3) Пирамида «врезается» в призму (рис. 255, $д$). Одна вершина пирамиды находится внутри призмы. Горизонтальная проекция линии сечения KLM находится на горизонтальном следе вертикальной грани призмы; вертикальную же проекцию линии сечения легко находим, снеся горизонтальные проекции точек встречи рёбер пирамиды с гранью призмы на вертикальные проекции соответствующих рёбер пирамиды.

4) Пирамида попрежнему врезается в призму (рис. 255, $е$). Но теперь вершина пирамиды доходит до другой грани призмы. Линию сечения и общую точку N находим так же, как и в предыдущих случаях.

5) Пирамида пронизывает призму насквозь (рис. 255, $ж$); пирамида проникает в призму через одну из её граней и выходит сквозь другую; построение линий сечения KLM и NPQ производится так же, как выше.

Теперь начнём передвигать пирамиду в другом направлении—от плоскости V к нам.

6) Пирамида проходит сквозь две грани призмы так, что две линии сечения имеют общую точку K (рис. 255, $з$). В этой точке ребро SA пирамиды пересекается с ребром RT призмы.

Остальные случаи, изображённые на рисунках 255, $и$, $к$, $л$, $м$, читателю рекомендуется рассмотреть самостоятельно.

§ 84. Как строить линию сечения двух многогранников

Задача построения линии сечения двух выпуклых многогранников состоит из двух частей.

1) Сначала нужно найти точки пересечения рёбер одного многогранника с гранями второго, а также рёбер второго многогранника с гранями первого. Получим ряд точек—вершин ломаных замкнутых контуров пересечения. Таких контуров (в случае когда оба многогранника—выпуклые) может быть один или два. Нахождение этих точек сводится, таким образом, к нахождению точек пересечения прямых с поверхностью многогранника (см. § 80).

2) После того как все вершины линии сечения найдены, необходимо соединить каждую из этих точек с двумя соседними точками искомой линии сечения.

Здесь нужно помнить, что каждое «звено» (прямолинейный отрезок) этой линии является линией пересечения двух граней—одной грани первого многогранника и одной грани второго.

Нужно выяснить, в каких гранях того и другого многогранника находится каждая найденная точка пересечения, и соединить между собой такие две точки, которые одновременно находятся в одной и той же грани первого и в одной и той же грани второго многогранника.

Для примера возвратимся к рисунку 255, $и$. На этом рисунке видно, что

1) точка L есть пересечение ребра SB пирамиды с гранью $VWTR$ призмы; следовательно, она лежит в гранях $VWTR$, SBA и SBC ;

2) точка M —пересечение ребра SC пирамиды с той же гранью $VWTR$ призмы; она лежит в гранях $VWTR$, SCA , SBC ;

3) точка P —пересечение ребра SB с гранью $ZUTR$; она лежит в гранях $ZUTR$, SBA , SBC ;

4) точка Q —пересечение ребра SC с гранью $ZUTR$; она лежит в гранях $ZUTR$, SCA , SBC ;

5) точка K —пересечение ребра RT призмы с гранью SBA пирамиды; она лежит в гранях $VWTR$, $ZUTR$, SBA ;

6) точка N —пересечение ребра RT призмы с гранью SCA пирамиды; она лежит в гранях $VWTR$, $ZUTR$, SCA .

Начнём с какой-нибудь точки, например с точки L . С какой точкой её соединить? L лежит в грани $VWTR$ призмы и SBA пирамиды. Какая ещё точка лежит в этих же гранях? Точка K . Значит, нужно соединить прямолинейным

отрезком точки L и K ; LK есть линия пересечения грани $VWTR$ призмы и грани SBA пирамиды.

Переходим к следующему звену. С какой точкой соединить дальше точку K ? Мы ещё не использовали грани $ZUTR$, в которой лежит эта точка. K лежит в грани $ZUTR$ призмы и SBA пирамиды. Какая ещё точка лежит в этих гранях? Точка P . Второе звено— KP . Точка P лежит в гранях SBC (не рассмотренной раньше) и $ZUTR$. С какой точкой её соединять? С точкой Q , лежащей на той же грани $ZUTR$. Рассуждая аналогично, точку Q соединяем с N , точку N —с M , точку M —с L .

Соединив последовательно все шесть точек, мы возвратились в точку L .

Искомая линия пересечения— $LKPQNM$ (на горизонтальной проекции она сливается с контуром проекции призмы).

Для наглядности составим схему, расположив вершины ломаной линии сечения в найденном порядке.

Вершины линии пересе- чения	Грани призмы	Грани пирамиды
L	$\{VWRT\}$	$\{SBA \quad SBC\}$
K	$\{VWRT \quad ZURT\}$	$\{SBA\}$
P	$\{ZURT\}$	$SBA \quad SBC$
Q	$\{ZURT\}$	$SBC \quad SCA$
N	$VWRT \quad ZURT$	$\{SCA\}$
M	$\{VWRT\}$	$\{SCA\}$
L	$\{VWRT\}$	$\{SBC \quad SCA\}$

Остаётся только выделить на полученном чертеже видимые линии. Это делается по общим правилам, уже известным читателю.

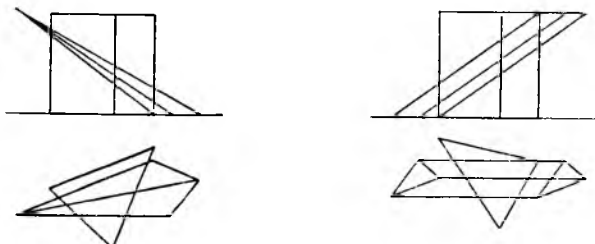


Рис. 256. Постройте линию пересечения двух многогранников.

У п р а ж н е н и е. Постройте линии сечения многогранников (рис. 256). Переместите на каждом чертеже призму, стоящую на H , последовательно вперёд, назад, вправо, влево на одну шестую её высоты; построьте новые линии сечения и сравните их.

§ 85. Общий случай пересечения многогранников

В предыдущей задаче построение точек пересечения рёбер пирамиды с гранями призмы значительно облегчалось тем, что грани призмы были перпендикулярны к плоскости H .

Рассмотрим случай двух тел, расположенных произвольным образом. Построим линию сечения двух треугольных пирамид $SABC$ и $TDEF$ (рис. 257, а).

Задача эта решается последовательным нахождением точек встречи рёбер одной пирамиды с гранями другой. В результате получаем рисунок 257, б, из которого видим, что:

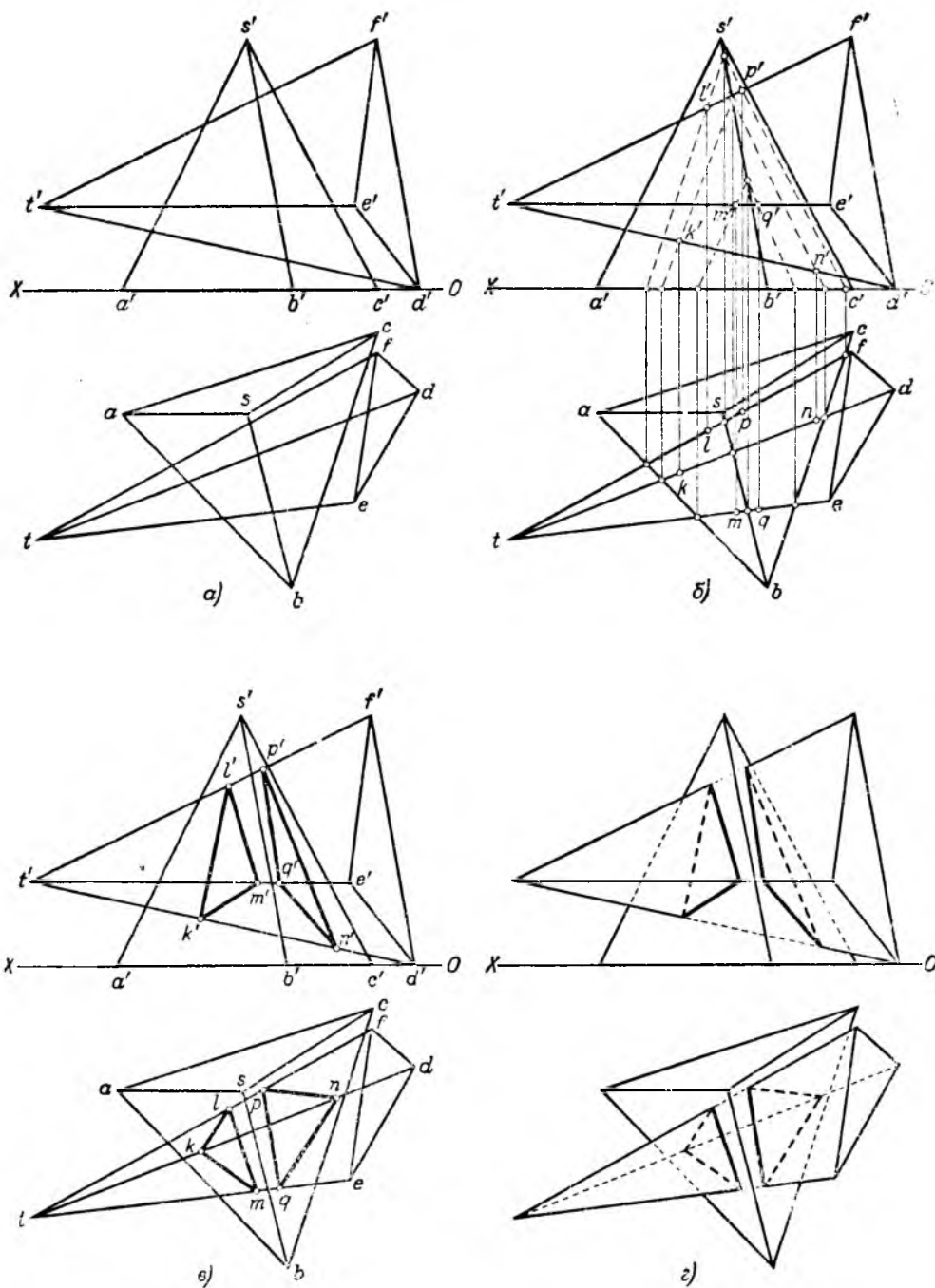


Рис. 257. Пересечение двух пирамид.

1) рёбра пирамиды $TDEF$ встречаются с гранями пирамиды $SABC$ в шести точках (см. таблицу).

2) рёбра пирамиды $SABC$ не встречаются с гранями пирамиды $TDEF$.

Искомая линия сечения состоит из двух отдельных участков: KLM в плоскости SAB и NPQ в плоскости SBC (рис. 257, в).

На рис. 257, г выделены видимые элементы. Задача решена.

Упражнение. Постройте линии пересечения многогранников (рис. 258)

		Грани пирамиды $SABC$		
		SAB	SBC	SCA
Рёбра пирамиды $TDEF$	TD	K	N	—
	TE	M	Q	—
	TF	L	P	—

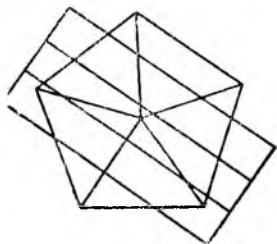
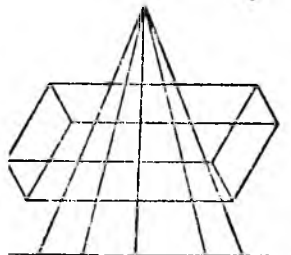
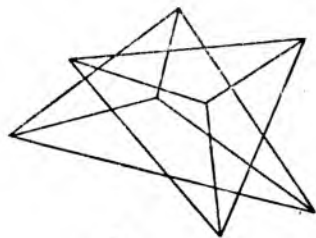
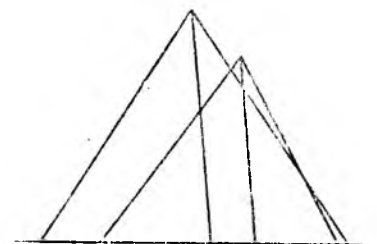


Рис. 258. Постройте линии пересечения двух многогранников.

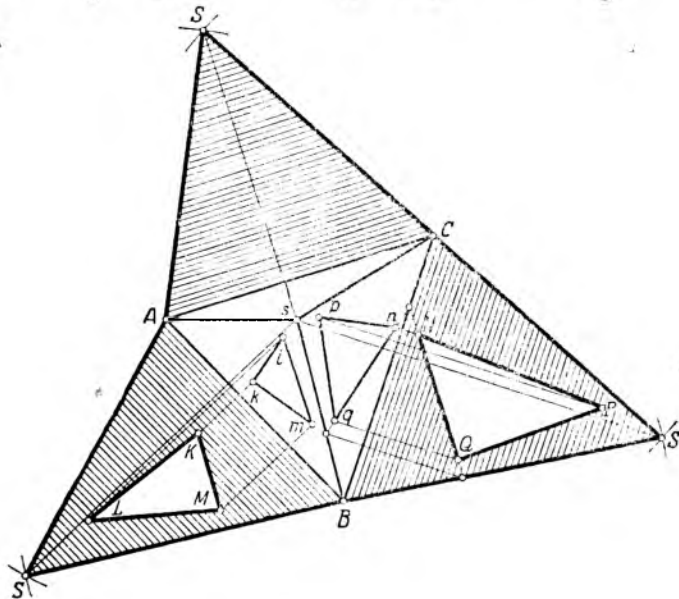
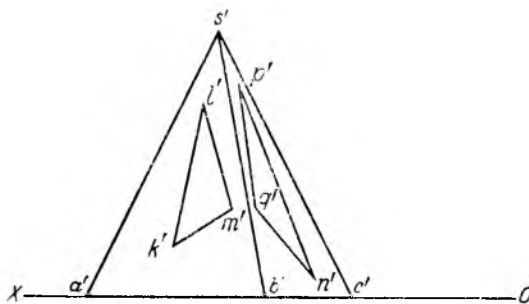


Рис. 259. Линии сечения на развёртке пирамиды.

Сделайте из бумаги (лучше всего из тонкого картона) модель пересекающихся пирамид, рассмотренных выше.

Для этого постройте развёртки обеих пирамид. Развёртка одной из них изображена на рис. 259.

На развёртке пирамиды $SABC$ постройте треугольники KLM и NPQ и вырежьте их. Склеив теперь обе пирамиды и вставив одну в другую, вы получите пространственную модель.

На рис. 260 даны эюры пирамиды $SABC$, пирамиды $TDEF$ и многогранника $KLMQPN$ —общей части пересекающихся пирамид.

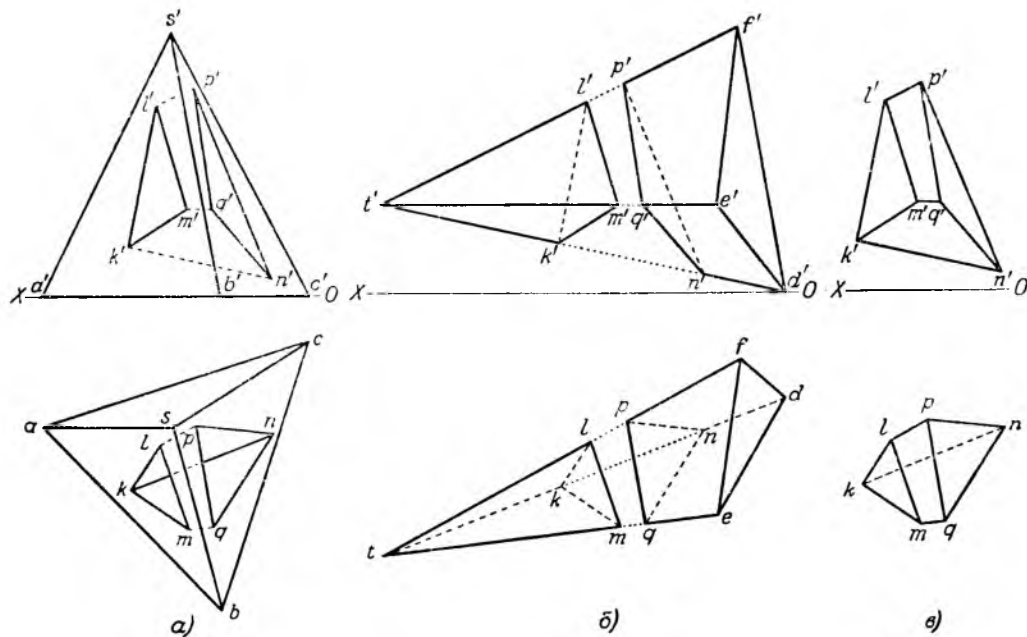


Рис. 260. Отдельные части пересекающихся пирамид.

У п р а ж н е н и я. 1. Изготовьте три тела: $TKLM$, $KLMQPN$ и $NPQEFD$. Составьте из них пирамиду $TDEF$. Вставьте общую часть в пирамиду S .

Учтите, что толщина картона не равна нулю.

2. Постройте развёртки и сделайте модели пересекающихся тел, данных в упражнении к предыдущему параграфу (рис. 256).

§ 86. Пересечение конуса с призмой

В предыдущих параграфах мы строили пересечения многогранников. Аналогичными методами строится пересечение конуса или цилиндра с многогранником. Следует искать пересечение образующих конуса или цилиндра с гранями многогранника.

Рассмотрим пример. Пусть требуется построить сечение правильной шестиугольной призмы с прямым круговым конусом. Основание призмы вписано в круг основания конуса. Образующие конуса составляют с его осью угол 60° .

На рис. 261 показана только одна четверть каждого из заданных тел (причём вертикальная проекция призмы не показана). Решив задачу для этой части, нетрудно распространить решение и на всю призму и конус.

Проводим образующие $S-1$, $S-2$, $S-3$, ..., $S-9$ конуса и находим точки $1_0, 2_0, 3_0, \dots, 9_0$ встречи этих прямых с вертикальными гранями призмы; полученные вертикальные проекции $1'_0, 2'_0, 3'_0, \dots, 9'_0$ соединяем плавными кривыми.

Линия $0-1_0-2_0-3_0-4_0-5_0-6_0-7_0-8_0-9_0$ —искомая.

Сообразите, почему точки $1'_0, 5'_0$ и $7'_0$ лежат на одной прямой, параллельной оси проекций; почему точки $1_0, 5_0$ и 7_0 лежат на одной окружности, описанной из точки S ?

Полученные линии сечения кругового конуса плоскостями, пересекающими не все образующие, как известно, — г и п е р б о л ы (см. § 75, рис. 226).

Рассмотренная задача имеет большое практическое значение: гайкам и головкам болтов придают форму правильной шестиугольной призмы и их края обтачивают по конусу с углом 120° при вершине. Таким образом, мы нашли форму кривых, ограничивающих головки болтов и гаек.

На практике, однако, при вычерчивании болтов и гаек для простоты отрезки гипербол заменяют дугами окружностей.

На рис. 262 изображён болт с гайкой.

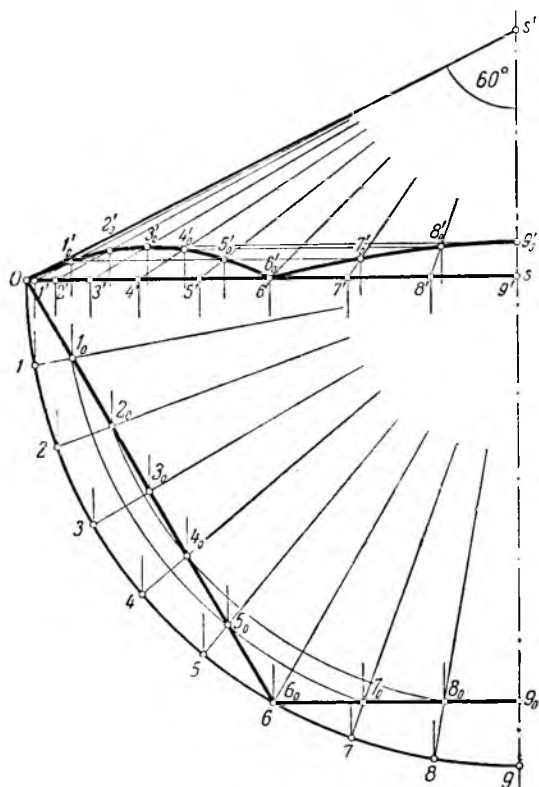


Рис. 261. Пересечение правильной шестиугольной призмы с круговым конусом (у обоих тел вращения—общая ось).

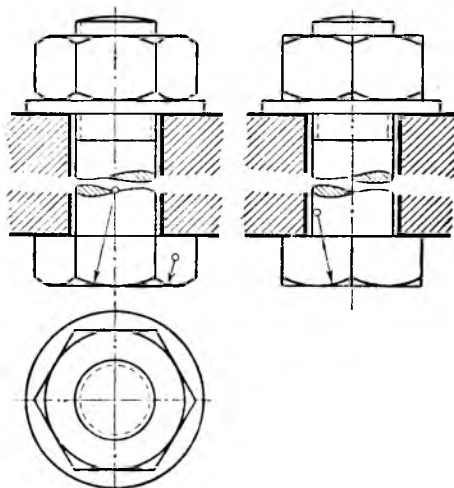


Рис. 262. Болт с гайкой.

Замена гипербол дугами окружности значительно упрощает вычерчивание, давая незначительную графическую ошибку.

У п р а ж н е н и е. Возьмите шестигранную гайку, изготовьте из бумаги конус с углом при вершине, равным 120° , и «посадите» конус на гайку.

ГЛАВА XII

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 87. Общие замечания о пересечении кривых поверхностей

Линией пересечения двух кривых поверхностей является в о б щ е м с л у ч а е некоторая *пространственная кривая*: её нельзя «положить» всеми своими точками на одну плоскость, нельзя нарисовать без искажений на бумаге. Только в некоторых особых случаях линия пересечения может оказаться плоской.

Примером пространственной кривой служит винтовая линия (например, пружина на рис. 164).

Пусть даны шар и круговой цилиндр, причём радиус цилиндра вдвое меньше радиуса шара, а одна из образующих цилиндра проходит через центр шара (рис. 263). В сечении получается п р о с т р а н с т в е н н а я к р и в а я , п о х о ж а я на восьмёрку.

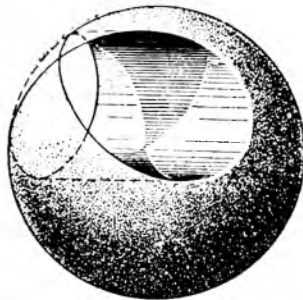


Рис. 263. Пересечение шара с цилиндром (пространственная кривая).



Рис. 264. Линия излома бутылки.

Линия излома круглой бутылки (рис. 264)—пространственная кривая.

В некоторых частных случаях линия пересечения двух кривых поверхностей может оказаться плоской, а иногда она может состоять из нескольких плоских линий. На рис. 265 изображены эюры пересекающихся поверхностей. Слева начерчены проекции каждого тела, а справа—эти же проекции вместе с линией сечения, причём выделены видимые элементы.

а) Две сферы любого радиуса пересекаются по окружности, плоскость которой перпендикулярна к линии центров этих сфер.

б) Сфера и круговой цилиндр, ось которого проходит через центр сферы, пересекаются по двум одинаковым окружностям.

в) Два круговых цилиндра одинакового диаметра, оси которых встречаются в одной точке под прямым углом, пересекаются по двум одинаковым эллипсам.

Вертикальные проекции этих эллипсов—два прямолинейных отрезка; горизонтальные проекции сливаются в одну окружность.

е) Два одинаковых круговых цилиндра, оси которых пересекаются под острым углом, пересекаются по двум разным эллипсам.

О проекциях этих эллипсов можно сказать то же самое, что и о проекциях эллипсов в примере в).

д) Два круговых цилиндра, образующие которых взаимно параллельны, пересекаются по двум параллельным прямым или касаются по одной прямой.

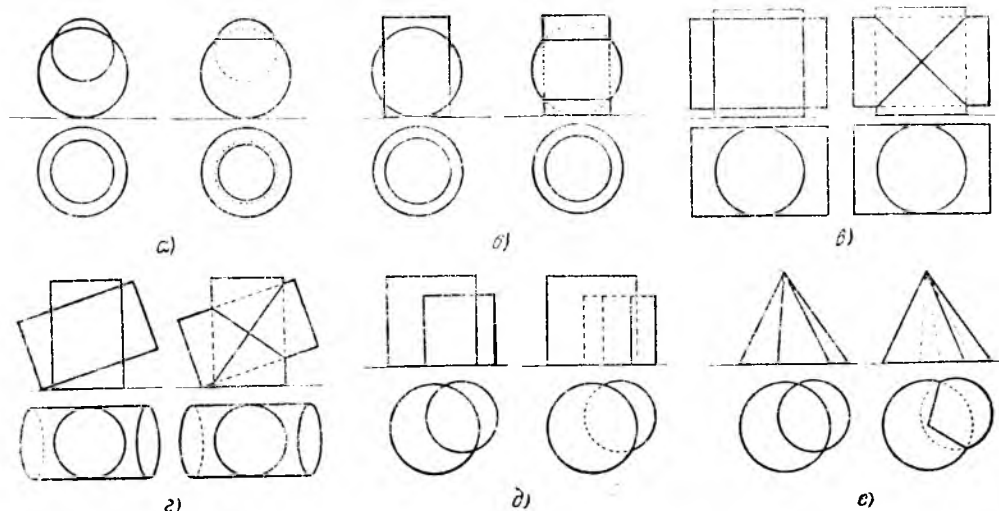


Рис. 265. Пересечения кривых поверхностей по плоским линиям.

е) Два конуса с общей вершиной могут иметь либо одну общую точку, либо общие образующие (одну или две). На рис. 265, е конусы пересекаются по двум прямым линиям.

На рис. 266 изображено пересечение сферы, лежащей на плоскости, с конусом, основанием которого является круг, лежащий в той же плоскости, а вершина которого находится в верхней точке шара. Интересно, что эти поверхности пересекаются по окружности. Это далеко не очевидно, но это именно так *).

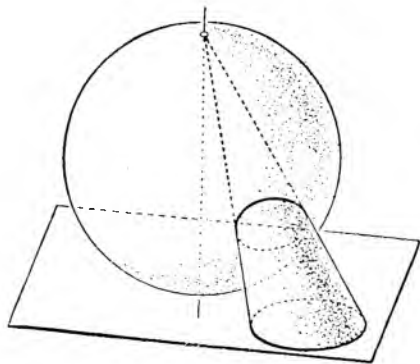


Рис. 266. Пересечение шара с конусом.

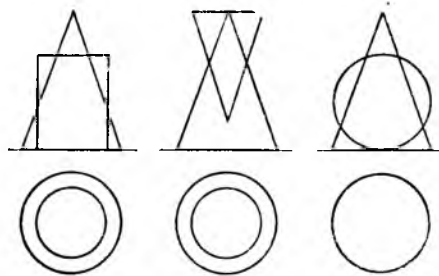


Рис. 267. Постройте линии пересечения этих поверхностей.

У п р а ж н е н и е. Постройте линии пересечения кривых поверхностей (рис. 267).

*) Доказательство см., например, в книге Д. Гильберта и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, изд. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1951, стр. 253—254.

§ 88. Пересечение сферы с призмой

Построим линию пересечения сферы (с центром в точке C) и поверхности треугольной призмы (рис. 268). Так как сечение сферы любой плоскостью является окружностью, то искомая линия сечения состоит из дуг окружностей.

На горизонтальной проекции находим точки 1 и 2 , в которых горизонтальный большой круг встречается плоскостью передней грани призмы.

Получающаяся в сечении сферы этой плоскостью окружность определяется диаметром $1-2$, зная который строим вертикальную проекцию окружности. Дуга $3'-1'-5'-4'$ —вертикальная проекция этой части линии сечения

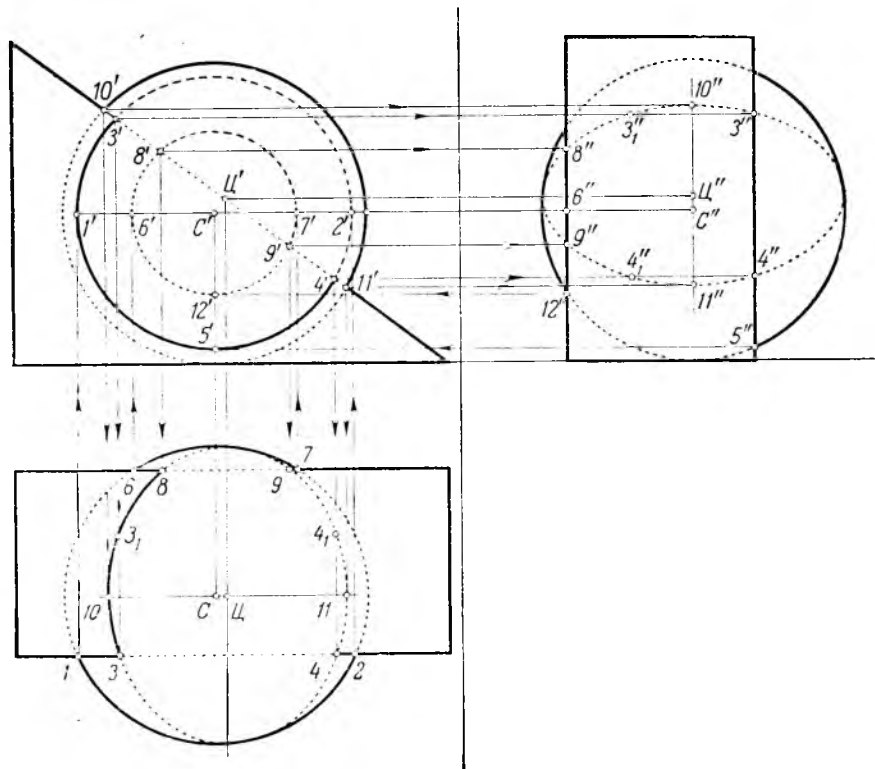


Рис. 268. Построение пересечения сферы с треугольной призмой.

(эту же окружность можно было найти при помощи точки $5''$ на профильной проекции).

Аналогично (при помощи диаметра $6-7$ или точки $12''$) строим дугу $8'-6'-12'-9'$, по которой сфера пересекается с задней гранью призмы.

Наклонную грань призмы сфера пересекает по дугам $3-8$ и $4-9$ окружности с центром C ; при данном расположении секущей плоскости эти дуги проектируются на плоскости H и W в виде дуг эллипсов с центрами C и C'' . Большой круг, находящийся в плоскости, параллельной плоскости V , встречается наклонную грань призмы в точках 10 и 11 , легко обнаруживаемых на вертикальной проекции. Точка 3_1 симметрична точке 3 , а точка 4_1 симметрична точке 4 относительно плоскости, параллельной V и проходящей через центр C шара (почему?). Соединяем плавными кривыми точки $3-10-3_1-8$ и $4-11-4_1-9$.

Все четыре участка линии сечения построены.

На рис. 269, *а* показаны только видимые элементы. На рис. 269, *б* изображена призма, из которой изъята часть, общая с шаром; изготовив такую модель, можно вложить в неё целый шар.

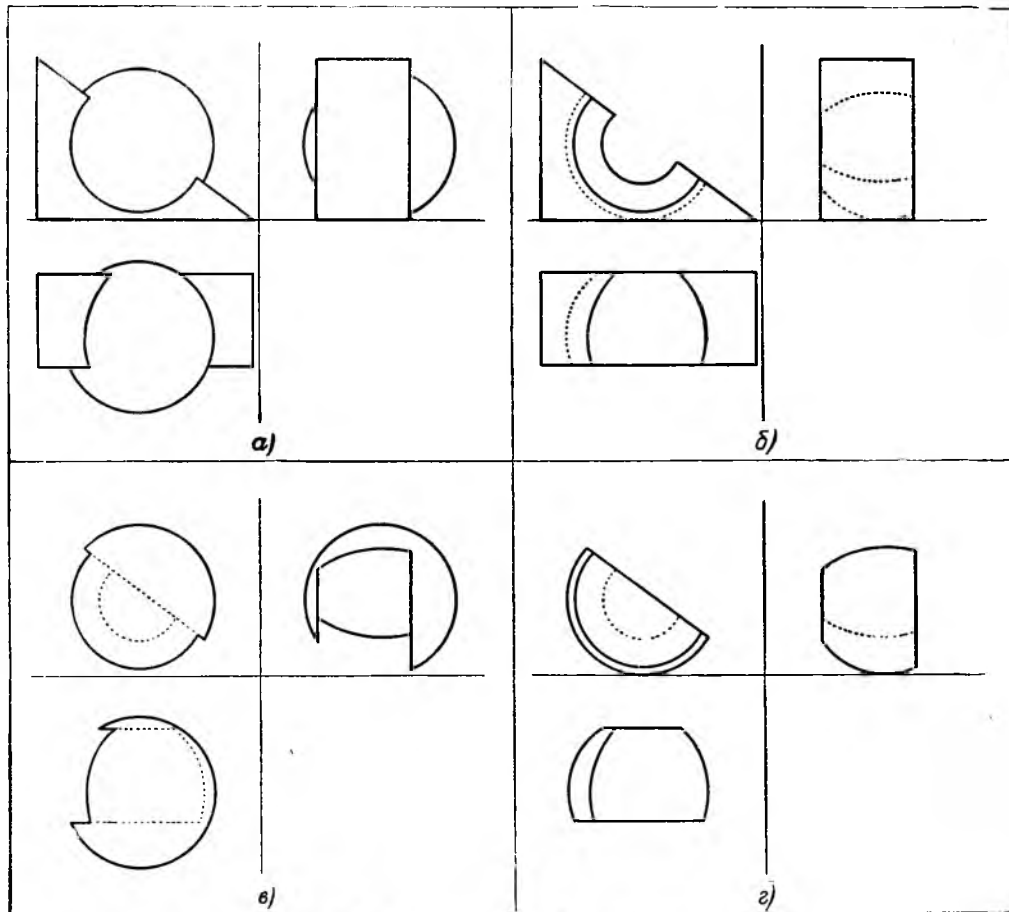


Рис. 269. Пересечение сферы и призмы.

На рис. 269, *в* изображён шар, из которого изъята часть, общая с призмой; изготовив такую модель, в неё можно вставить призму.

На рис. 269, *г* изображено тело, являющееся общей частью шара и призмы.

У п р а ж н е н и е. Возьмите шар (из шарикоподшипника, деревянный, либо даже мяч). Определите, во сколько раз этот шар больше (или меньше) изображённого на эюре (рис. 268), начертите эюр соответственно увеличенной (или уменьшенной) призмы; сделайте из картона развёртку призмы, нанесите на развёртку линию сечения; так как она состоит из четырёх дуг окружностей, то на развёртке её можно и нужно построить точно (для этого надо сделать небольшое добавочное построение—какое?). Склейте модель призмы с вырезом; вложите туда шар, он должен плотно прилегать к линии сечения.

Рассмотрим ещё пример. Возьмём куб $1-2-3-4-5-6-7-8$ и построим линию пересечения поверхности этого куба со сферой данного радиуса R , имеющей центр в данной точке K (рис. 270).

Переменим плоскости проекций трижды:

1) от системы плоскостей проекций $V-H$ перейдём к системе V_1-H такой, чтобы плоскость V_1 была перпендикулярна к плоскости $1-2-3-4$ (и $5-6-7-8$); для этого проведём ось O_1X_1 перпендикулярно к $1-2$;

2) от системы V_1-H перейдём к системе V_1-H_1 так, чтобы плоскость H_1 была параллельна плоскости $1-2-3-4$ (и $5-6-7-8$); для этого проводим ось O_2X_2 перпендикулярно к $1'-8'_1$;

3) от системы V_1-H_1 перейдём к H_1-V_2 так, чтобы плоскость V_2 была параллельна плоскости $1-2-7-8$ (и $3-4-5-6$); для этого ось O_3X_3 должна быть перпендикулярна к 1_1-4_1 .

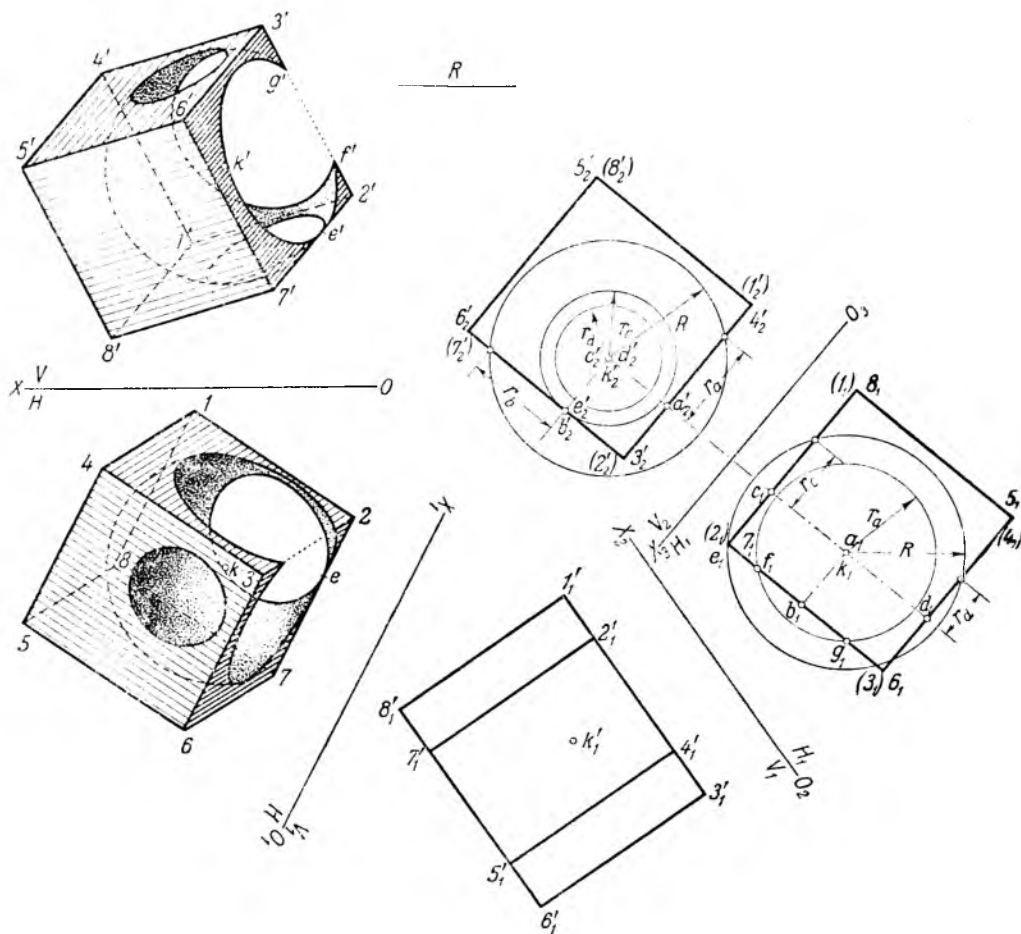


Рис. 270. Пересечение куба со сферой.

Теперь четыре ребра куба ($1-2$, $3-4$, $5-6$ и $7-8$) параллельны оси O_3X_3 ; грани $1-2-7-8$ и $3-4-5-6$ проектируются без искажения на плоскость V_2 ; грани $1-2-3-4$ и $5-6-7-8$ проектируются без искажения на плоскость H_1 ; точно также всякая линия на какой-либо из этих граней проектируется на параллельную ей плоскость проекций без искажения. Из точки K как из центра опишем шар данного радиуса R ; его проекции на V_2 и H_1 —два круга радиуса R , описанные из k'_1 и k_1 .

Решение данной задачи основывается на том, что сечение шара плоскостью—всегда круг; при этом перпендикуляр, опущенный из центра шара на секущую плоскость, пройдёт через центр искомого круга.

Рассмотрим последовательно все шесть граней куба:

грань $1-2-3-4$ пересечена шаром по кругу, центр которого в точке A , а радиус равен r_a ;

грань $2-3-6-7$ пересечена шаром по кругу, центр которого в точке B , а радиус равен r_b ;

грань $1-2-7-8$ пересечена шаром по кругу, центр которого в точке C , а радиус равен r_c ;

грань $3-4-5-6$ пересечена шаром по кругу, центр которого в точке D , а радиус равен r_d ;

грани же $5-6-7-8$ и $1-4-5-8$ куба с шаром не встречаются.

Линия сечения грани $1-2-3-4$ сферой—не полная окружность, а лишь часть её, так как ребро $2-3$ пронизывает шар; это же замечание относится и к линии сечения на грани $2-3-6-7$; таким образом, линии сечения на гранях $1-2-3-4$ и $2-3-6-7$ —дуги двух окружностей, имеющие две общие точки на ребре $2-3$ куба.

Ребро $2-7$ куба—касательная к шару; в точке E этого ребра линия сечения грани $2-3-6-7$ касается линии сечения грани $1-2-7-8$.

Перенеся полученные на вспомогательных проекциях линии сечения на заданные проекции куба, получаем решение задачи.

Напомним, что поскольку сечения шара плоскостью—всегда круги, постольку проекции этих линий сечений—всегда эллипсы.

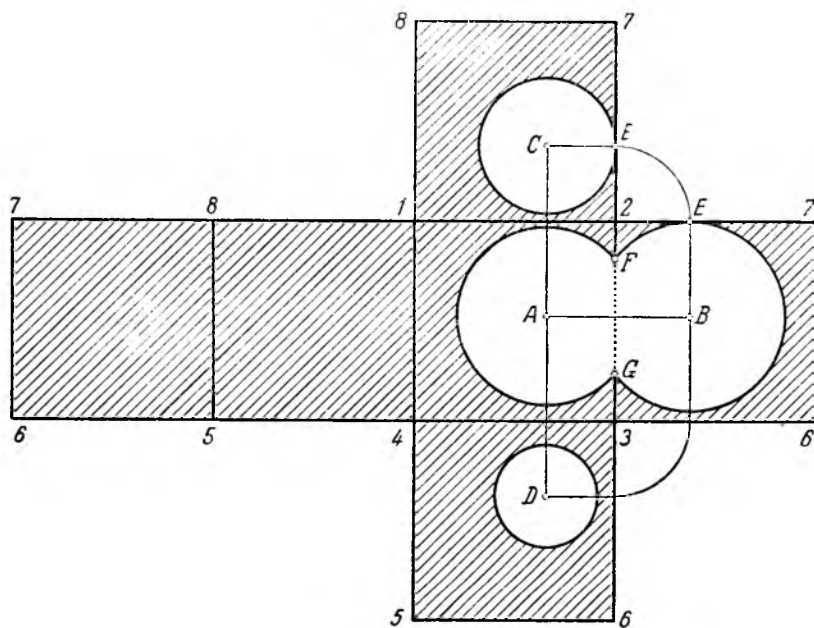


Рис. 271. Пересечение поверхности куба со сферой (развёртка).

Построение развёртки куба с линией сечения на ней (рис. 271) не представляет особого труда, так как известны проекции куба и линии сечения на плоскости V_2 и H_1 . Переносим на развёртку точки A , B , C и D (центры дуг окружностей—звеньев линии сечения), и радиусами, равными соответственно r_a , r_b , r_c , r_d строим дуги окружностей (звенья линии сечения на развёртке).

На развёртке хорошо видна связь между расположением точек A , B , C и D .

§ 89. Пересечение пирамиды с цилиндром

В двух рассмотренных в § 88 задачах построение упрощалось благодаря тому, что форма линии сечения, получающейся при сечении сферы плоскостью, нам заранее известна; это была окружность.

В общем же случае пересечения многогранника с кривой поверхностью приходится строить линию сечения по отдельным точкам встречи рёбер этого многогранника с поверхностью.

На рис. 272 даны правильная шестиугольная пирамида, стоящая на плоскости H , и прямой круговой цилиндр, образующие которого горизонтальны; для построения линии сечения в данном случае оказывается удобным заменить вертикальную плоскость проекций V новой плоскостью V_1 , перпендикулярной

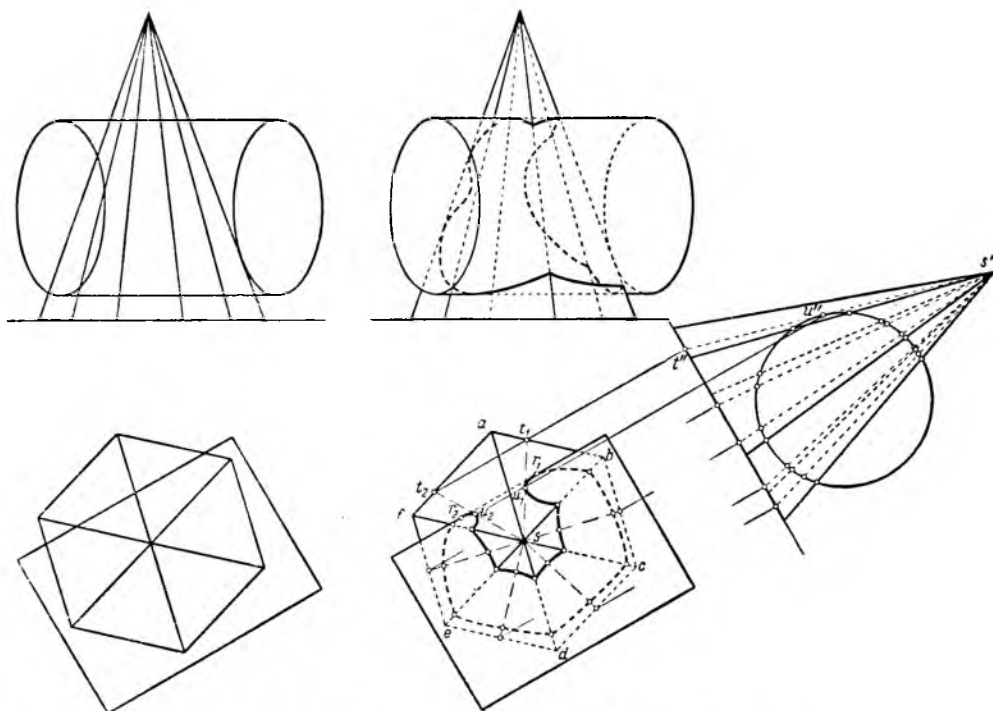


Рис. 272. Пересечение пирамиды с цилиндром.

к образующим цилиндра; в таком случае основания цилиндра спроектируются на V_1 в круг, а проекция искомой линии сечения окажется просто частью окружности—именно той, которая лежит в пределах новой проекции пирамиды. Остаётся перенести её по точкам на данные проекции. Каждое из пяти рёбер пирамиды (SB , SC , SD , SE и SF) пересекает поверхность цилиндра в двух точках (поставьте сами эти десять точек на чертеже). Для построения линии сечения на участках между каждыми двумя точками, находящимися на двух смежных рёбрах, необходимо построить ещё дополнительные точки; поэтому проведём четыре вспомогательных луча из точки S —перпендикуляры к рёбрам основания BC , CD , DE и EF —и найдём ещё восемь точек (поставьте и их). Рёбро SA пирамиды с цилиндром не встречается.

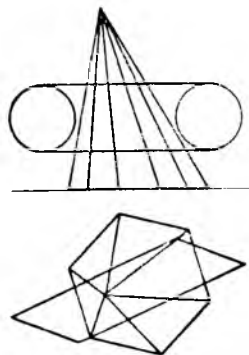


Рис. 273. Постройте пересечение этих тел.

Как поведёт себя кривая на гранях SAB и SAF ?

Проведём из точки s'' (новой вертикальной проекции вершины пирамиды) касательную $s''u''$ к окружности—проекции цилиндра; мы получим проекции двух прямых ST_1 и ST_2 , лежащих на гранях пирамиды, проходящих через её вершину S и являющихся касательными к линии сечения. Находим точки u_1 и u_2 . Наконец, находим точки R_1 и R_2 , в которых ближайшая к V образующая цилиндра встречает пирамиду (построение на рисунке не показано). Точки, лежащие на одной грани, соединяем плавными кривыми.

У п р а ж н е н и е. Построить линии сечения (рис. 273).

§ 90. Примеры пересечения кривых поверхностей

Для построения линии пересечения кругового конуса круговым цилиндром (рис. 274) проводим произвольную образующую конуса и находим точки встречи её с цилиндром; построение пары таких точек показано на рис. 274. Можно построить линию сечения, находя точки встречи образующих цилиндра с поверхностью конуса.

Таков и общий метод построения линий сечения двух поверхностей, из которых хотя бы одна содержит прямые линии *).

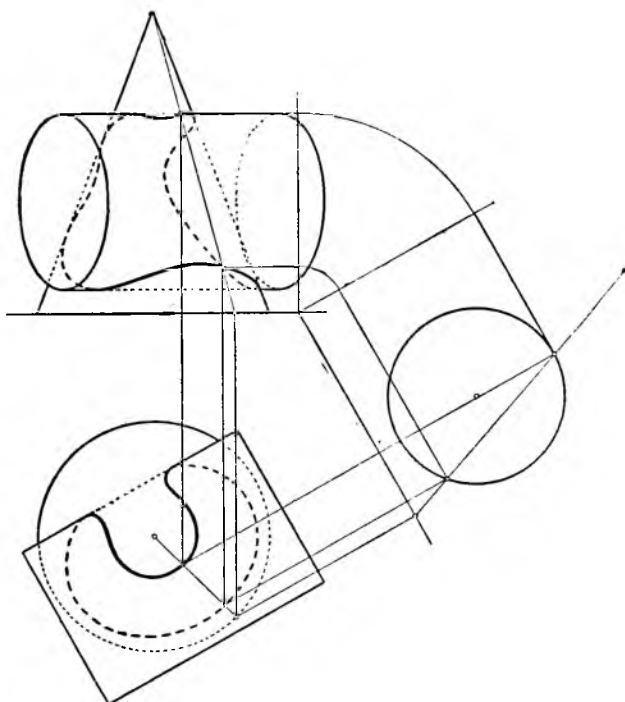


Рис. 274. Пересечение кругового конуса с круговым цилиндром.

На рис. 275 приведён более сложный пример пересечения цилиндра с конусом. Здесь даны конус случайной формы (вершина его T , а направляющая—линия $1-10$) и прямая KL ; построить линию пересечения конуса с круговым цилиндром, осью которого служит данная прямая, а радиус равен данному отрезку.

Пометим на основании конуса десять точек ($1, 2, \dots, 10$); эти точки следует располагать равномерно; среди них следует взять также и те, которые определяют крайнюю правую и крайнюю левую образующие на вертикальной проекции конуса — точки 5 и 10 .

Заменим теперь плоскости проекций так, чтобы одна из них была перпендикулярна к оси цилиндра. Это можно сделать в два приёма.

Заменим вертикальную плоскость проекций V новой плоскостью V_1 , параллельной прямой KL ; новая ось проекций OX_1 должна быть параллельной горизонтальной проекции KL —линии kl . Затем построим новую вертикальную проекцию конуса и прямой KL .

*) Такая поверхность называется *линейчатой*.

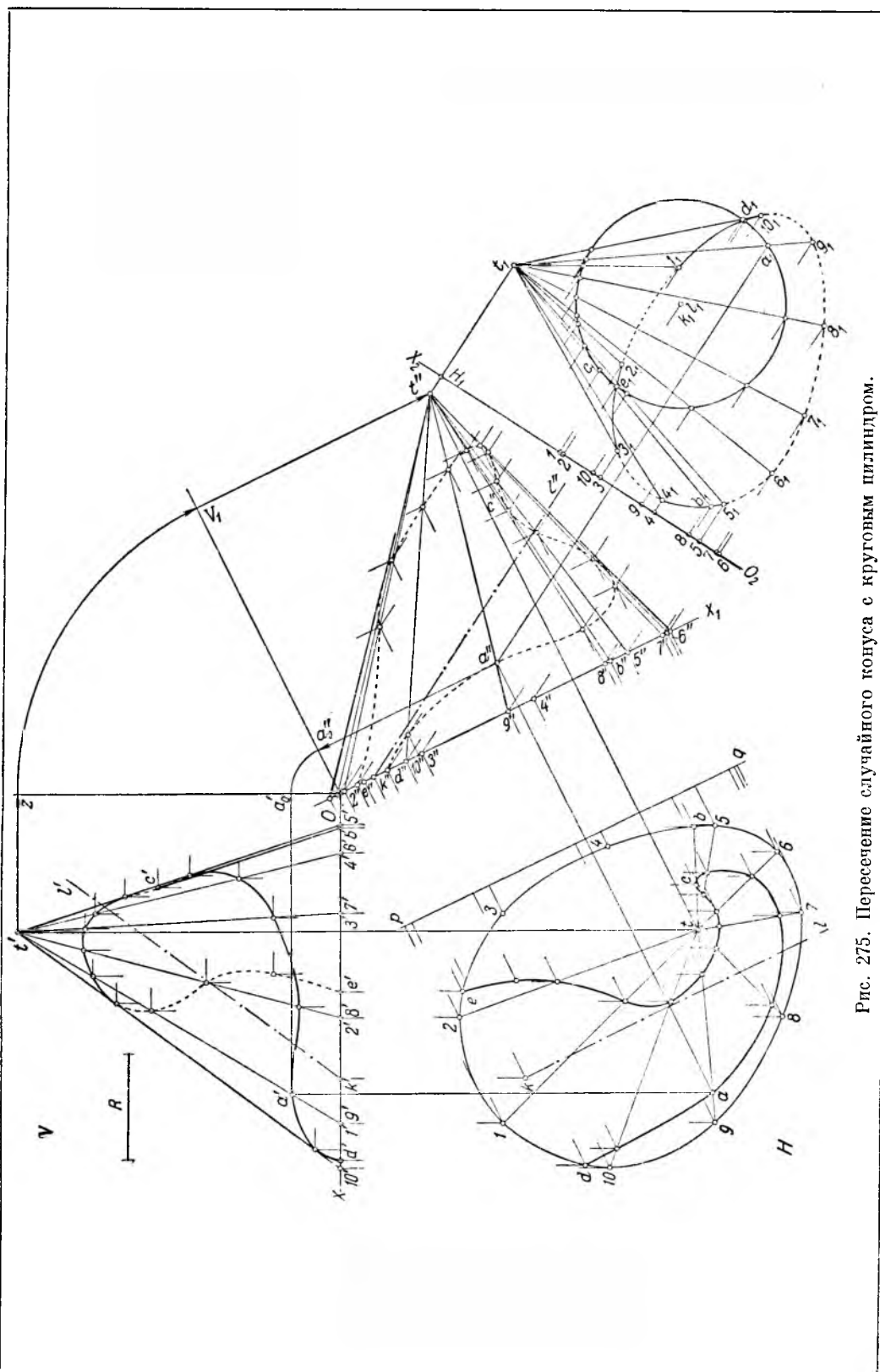


Рис. 275. Пересечение случайного конуса с круговым цилиндром.

Далее, заменим горизонтальную плоскость проекций H новой плоскостью H_1 , перпендикулярной к данной прямой KL . Построим новую горизонтальную проекцию конуса и данной прямой*).

На новую горизонтальную проекцию ось цилиндра спроектируется в точку (k_1, l_1) ; если мы из этой точки опишем данным радиусом окружность, то получим проекцию цилиндра на плоскость H_1 ; точки пересечения этой окружности с образующими конуса и являются проекциями точек искомой линии сечения.

Теперь остаётся найденную в проекции на плоскости H_1 линию сечения перенести на первоначальные проекции на плоскости V и H .

Проследим за перенесением проекций какой-нибудь одной из полученных точек, например точки A на образующей $T-9$.

По точке a_1 находим a'' , проводя линию a_1a'' перпендикулярно к O_2X_2 до пересечения с $t'-9''$; далее, проведём $a''a$ перпендикулярно к O_1X_1 до пересечения с $t-9$ и получим a ; наконец, проводим aa' перпендикулярно к OX до пересечения с $t'-9'$ и получим a' .

Аналогично этому находим вторую точку на образующей $T-9$, по две точки на образующих $T-5$, $T-6$, $T-7$, $T-8$ и $T-10$ и по одной точке на образующих $T-1$ и $T-2$; образующие же $T-3$ и $T-4$ с данным цилиндром не пересекаются.

Остаётся соединить плавной кривой полученные точки, причём найденную на образующей точку встречи поверхности конуса с поверхностью цилиндра надо соединить с точками встречи двух смежных образующих; например, точку A на образующей $T-9$ надо соединить с точками на образующих $T-8$ и $T-10$.

Задача решена, линия пересечения найдена. Это—пространственная кривая.

Добавим некоторые практические замечания.

1) После построения второй горизонтальной проекции конуса видно, что образующие $T-3$ и $T-4$ с цилиндром совсем не пересекаются, поэтому их незачем чертить на остальных проекциях.

2) проводя по боковой поверхности ряд образующих, мы как бы заменяем конус вписанной в него пирамидой и находим точки встречи рёбер последней с цилиндром; эти точки и являются точками на искомой кривой сечения конуса цилиндром; плавная кривая, проведённая через эти точки, приближённо даёт искомую кривую; чем точнее хотим мы получить кривую, тем больше точек надо взять на ней.

3) При построении второй горизонтальной проекции конуса нет никакой необходимости, вообще говоря, строить по точкам кривую—новую проекцию основания конуса. Равным образом, в общем случае нет необходимости затрачивать время на проведение кривой $1'-2'-3'-\dots-10'$ на второй горизонтальной проекции, поэтому на чертеже обе эти линии даны пунктиром. Однако следующие соображения заставляют вычертить вторую горизонтальную проекцию основания на двух участках возможно точнее. Цилиндр пересекает контур основания конуса в двух точках D и E («начало» и «конец» кривой). Поэтому на участках $1-10$ и $2-3$ необходимо нанести возможно точнее проекцию кривой основания для получения точек d_1 и e_1 , а по ним—точек d , e и d' , e' .

4) Отметим ещё одну точку C кривой. На второй вертикальной проекции видно, что цилиндр пересекает образующую $T-5$, но не доходит до образующей $T-4$; следовательно, в этой части искомая линия сечения делает поворот. Для более точного построения этого участка линии сечения надо найти ту крайнюю образующую конуса, до которой эта линия доходит. Для этого из точки t_1

*) Для того чтобы чертёж был более компактным, от оси O_2X_2 будем откладывать расстояния точек $1, 2, \dots$ не до оси O_1X_1 , а до вспомогательной прямой pq , параллельной O_1X_1 .

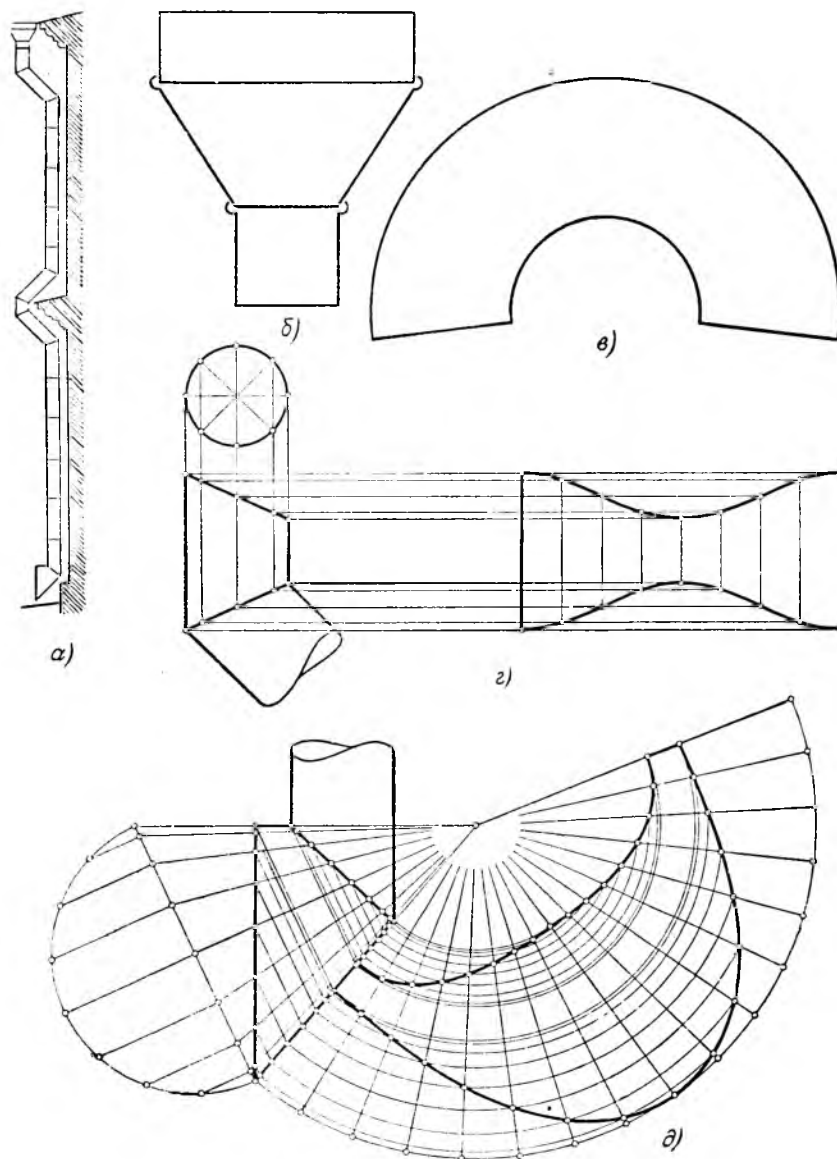


Рис. 276. Водосточная труба.

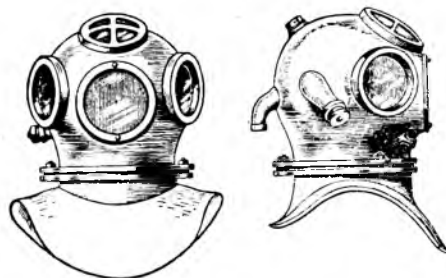


Рис. 277. Водолазный скафандр.

проводим к кругу (проекции цилиндра) касательную $t_1 b_1$; точка касания c_1 и есть крайняя точка на линии сечения; по c_1 находим c'' и далее точки c и c' при помощи b'' , b и b' .

У п р а ж н е н и е. Построить линии сечения того же конуса с круговым цилиндром, радиус оснований которого равен: 1) $\frac{3}{4}$ заданного; 2) $\frac{5}{4}$ заданного.

Для всех трёх случаев найти линию сечения плоскости H цилиндром.

§ 91. Практические примеры

Приведём несколько примеров пересечений поверхностей.

1) На рис. 276, *a* изображена водосточная труба. Верхняя её часть—воронка—начерчена отдельно (рис. 276, *б*). Она представляет собой поверхность вращения, состоящую из трёх частей. Верхняя и нижняя части—цилиндры, а средняя—усечённый круговой конус. Эти три поверхности пересекаются друг с другом по окружностям.

Звенья же самой трубы—цилиндры одного и того же радиуса. «Колено» трубы образуется пересечением двух звеньев под некоторым углом.

Внизу труба оканчивается «копытом», имеющим форму кругового конуса, дважды усечённого непараллельно основанию.

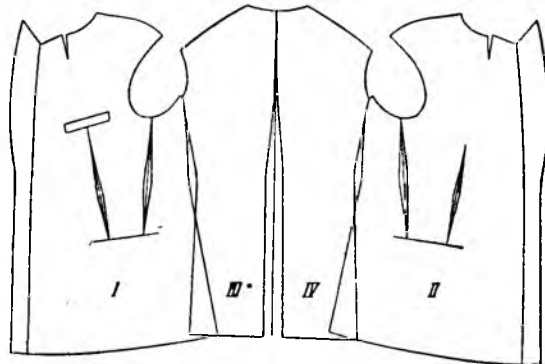


Рис. 278. Выкройка основной части пиджака.

На рис. 276, *в* изображена развёртка конической части воронки по способу, изложенному в § 70; на рис. 276, *г*—развёртка среднего звена трубы (цилиндра, усечённого сверху и снизу); на рис. 276, *д*—развёртка «копыта».

2) На рис. 277 изображён водолазный скафандр, представляющий соединение нескольких тел, пересекающихся по кривым линиям.

3) На рис. 278 изображена выкройка основной части пиджака. Выкройки одежды—это приближённые развёртки пересекающихся кривых поверхностей, отвечающих форме и размерам человеческого тела.

4) На рис. 391 (стр. 220) изображён подземный зал станции «Сокол» Московского метрополитена—интересный пример пересечения круговых цилиндров.

ГЛАВА XIII

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

§ 92. Касательная плоскость

На столе лежат стальной шарик, круглый карандаш и баранка (рис. 279).

Шар *касается* плоскости стола в одной точке; карандаш *касается* плоскости стола по отрезку прямой линии; баранка *касается* плоскости стола по окружности.

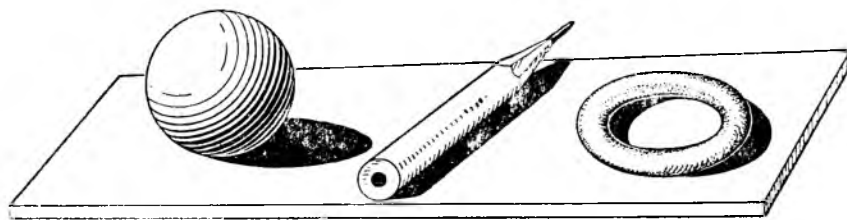


Рис. 279. Различные случаи касания поверхности и плоскости.

Пусть дана некоторая кривая поверхность S (рис. 280) и на ней «обыкновенная» точка O^*); проведём по поверхности S через точку O две любые кривые, например кривые AB и CD . Построим KL и MN —касательные к AB и CD в точке O ; пересекающиеся прямые KL и MN , имеющие общую точку O , определяют плоскость T .

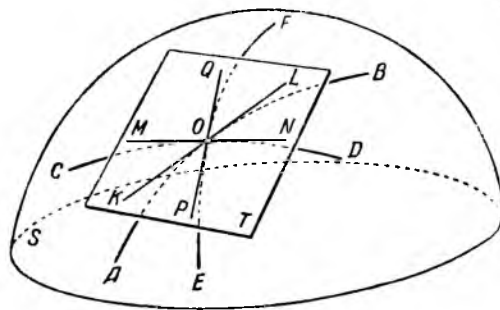


Рис. 280. Касательная плоскость.

Можно доказать, что какую бы третью кривую мы ни провели по поверхности S через ту же точку O (например, кривую EF)—касательная (PQ) к этой кривой окажется в той же плоскости T , что и касательные KL и MN .

Следовательно, все касательные прямые к кривым, проведённым по кривой поверхности S через «обыкновенную» точку O , лежат в одной плоскости (T); эта плоскость называется *касательной плоскостью к кривой поверхности* в данной её точке.

Поэтому общий приём построения плоскости, касательной к кривой поверхности в данной «обыкновенной» точке, состоит в построении двух прямых, каса-

*) Мы называем точку поверхности «обыкновенной», если поверхность в этой точке является гладкой. Например, вершина конуса не является обыкновенной; все точки поверхности цилиндрического тела, лежащие на окружности его основания, тоже не являются обыкновенными.

тельных к двум кривым, лежащим на поверхности и проходящим через данную точку, и проведении плоскости через эти две прямые.

В дальнейшем мы будем строить плоскости, касательные к простейшим кривым поверхностям, а именно к поверхностям вращения, конусам и цилиндрам.

§ 93. Проведение касательной плоскости в данной точке поверхности

Начнём с простейших случаев.

Построим плоскость, касательную к сфере в её точке S (рис. 281, а).

Пусть точка S лежит на большом круге, параллельном плоскости V . Проведём через эту точку второй большой круг, перпендикулярный к плоскости V . Чертим касательную к первому кругу; касательная ко второму

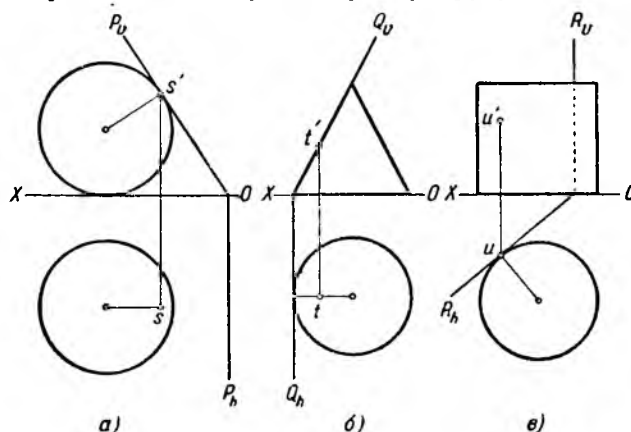


Рис. 281. Касательные плоскости к сфере, конусу и цилиндру, проведённые в заданной точке поверхности.

кругу перпендикулярна к плоскости V ; поэтому искомая касательная плоскость P , проходящая через эти две касательные прямые, перпендикулярна к этой же плоскости V .

Все необходимые построения сделаны на чертеже.

Полученное решение очевидно, и его можно было бы изобразить сразу.

Построим плоскость, касательную к конусу в его точке T (рис. 281, б).

Образующая конуса, проведённая через точку T , является первой прямой, определяющей касательную плоскость. Второй прямой служит касательная к горизонтальной окружности—направляющей конической поверхности, проходящей через данную точку T ; эта касательная перпендикулярна к плоскости V . Искомая плоскость, следовательно, перпендикулярна к V , что, впрочем, и так ясно.

Построим, наконец, плоскость, касательную к цилиндру в его точке U (рис. 281, в). Рассуждая аналогично, проводим через точку u прямую R_h перпендикулярно к радиусу основания, проведённому в эту точку, и строим $R_v \perp OX$. И в данном случае проверяем правильность решения, представив себе прямой цилиндр, стоящий на плоскости H , и вертикальную плоскость R .

Во всех трёх рассмотренных случаях точка, заданная на кривой поверхности, занимала выгодное положение, что весьма упрощало построения. Если же точка занимает случайное положение, то, преобразуя проекции способом вращения или перемены плоскостей проекций, мы сводим задачу к предыдущим.

Построим, например, касательную к поверхности вращения в данной на ней точке A (рис. 282*).

Мы видели в предыдущем параграфе, что касательная плоскость, проведённая через данную точку поверхности, определяется касательными к любым двум кривым, проведённым на поверхности через эту точку. Выберем в качестве таких кривых, проходящих через точку A , параллель и меридиан.

Первая касательная есть, очевидно, горизонтальная прямая AB . Вторую касательную AC мы получим, вращая точку A вокруг оси MN до положения A_1 ,

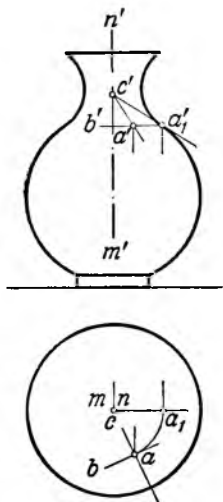


Рис. 282. Нахождение на эюре плоскости, касательной к поверхности вращения в данной точке.

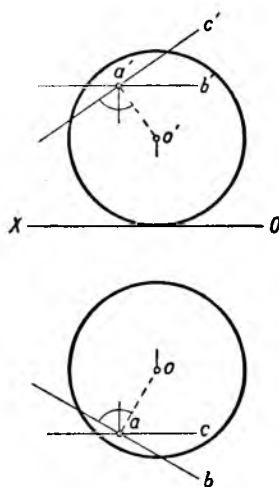


Рис. 283. Построение касательной плоскости к сфере в данной её точке.

на «контурном меридиане». При этом точка C , лежащая на пересечении этой касательной с осью симметрии MN , очевидно, останется неподвижной. Проведя на эюре касательную к контурному меридиану в точке a_1 , находим точку c' её пересечения с осью $m'n'$ и эту точку соединяем прямой линией с точкой a' . Вторая касательная построена.

Зная a , сразу проводим горизонтальные проекции касательных прямых: 1) ac и 2) $ab \perp ac$.

Прямые AB и AC построены, плоскость BAC —искомая.

Заметим, что кривая поверхность не всегда располагается по одну сторону от касательной плоскости; так, в рассмотренном примере она оказалась расщеплённой касательной плоскостью.

Иногда можно значительно упростить построения, воспользовавшись теми или иными геометрическими свойствами фигур.

Построим плоскость, касательную к сфере в точке A (рис. 283). Так как плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания, задача сводится к построению плоскости, перпендикулярной к радиусу OA . Проводим через точку A горизонталь AB ($ab \perp oa$) и фронталь AC ($a'c' \perp o'a'$).

Прямые AB и AC определяют искомую касательную плоскость.

*) После того как задана вертикальная проекция a' точки A поверхности вращения, её горизонтальная проекция a не может быть дана произвольно: по a' определяется сначала a'_1 , затем a_1 и только тогда — точка a , как пересечение дуги a_1a окружности с прямой $a'a$, перпендикулярной к оси проекции.

У п р а ж н е н и е. Найдите на бочке точку, в которой её коснётся крышка люка (рис. 284).

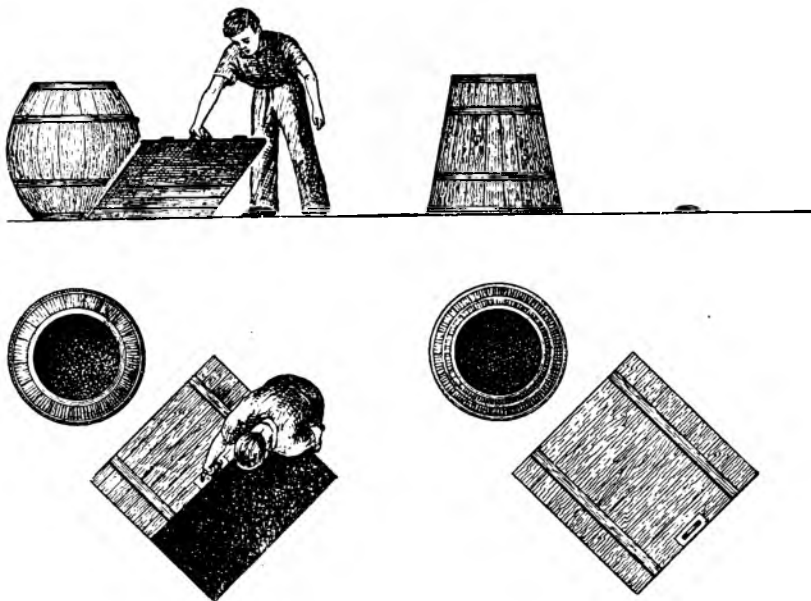


Рис. 284. Коснётся ли крышка люка бочки и кадки?

Если же на месте бочки будет кадка той же высоты и того же наибольшего диаметра, то крышка люка уже не может оказаться в роли касательной плоскости. Почему?

Куда надо переставить кадку для того, чтобы крышка люка могла быть касательной к ней?

§ 94. Проведение касательной плоскости к поверхности через заданную прямую

Решим задачу: провести касательную плоскость к сфере, проходящую через данную прямую (разумеется, надо взять прямую, не пересекающую сферы).

Поместим в стеклянную пробирку (её форма—прямой круговой цилиндр) шарик, диаметр которого равен диаметру пробирки. Поставим пробирку так,

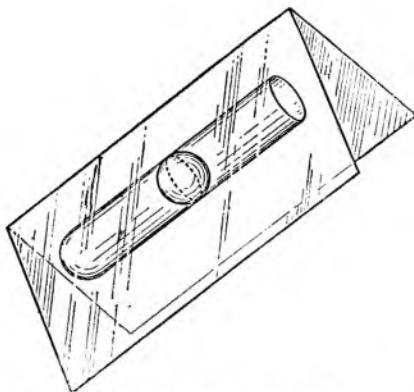


Рис. 285. Шарик в пробирке.

чтобы её образующие были параллельны заданной прямой. В таком случае плоскость, проходящая через данную прямую и касательная к цилиндру, и будет искомой плоскостью, касательной к шару *). Таких плоскостей—две (рис. 285)

*) Толщиной стенок пробирки пренебрегаем.

Шар касается цилиндра по большому кругу, плоскость которого перпендикулярна к образующим цилиндра, а следовательно, и к данной прямой. Поэтому на эюре задача решается так (рис. 286).

Переменим плоскости проекций дважды, а именно так, чтобы прямая AB оказалась перпендикулярной к плоскости H_1 (для этого сначала проводим плоскость V_1 перпендикулярно к H через AB и получаем $a'_1b'_1$, а затем проводим O_2X_2 перпендикулярно к $a'_1b'_1$; новой проекцией прямой AB оказывается точка $a_1(b_1)$).

Находим новую проекцию центра сферы (точку c_1) и новую проекцию сферы; эта проекция сферы является одновременно и проекцией касательного к ней цилиндра, образующие которого параллельны AB .

Проводим из точки $a_1(b_1)$ две касательные прямые a_1k_1 и a_1l_1 к окружности центра c_1 ; эти прямые являются проекциями двух касательных к сфере (и к цилиндру) плоскостей, проходящих через прямую AB перпендикулярно к плоскости проекций H_1 . Точки K и L — точки касания прямых к окружности и в то же время точки касания искомых плоскостей к данной сфере.

Остаётся найти точки K и L на заданных проекциях.

Рис. 286. Нахождение касательной плоскости к сфере при условии, что эта плоскость проходит через заданную прямую.

Точки k_1 и l_1 лежат на большом круге сферы, параллельном плоскости H_1 , т. е. перпендикулярном к плоскости V_1 , следовательно, k'_1 и l'_1 лежат на том диаметре круга центра c'_1 , который параллелен оси O_2X_2 . Теперь нетрудно построить k и l , а затем и k' и l' .

Заданная прямая AB и каждая из двух найденных точек касания (K и L) определяет одну из двух искомых касательных к сфере плоскостей.

Мы убедились, что через любую прямую, если она не пересекает сферу, можно провести две касательные плоскости к этой сфере.

Аналогично решается задача на построение плоскости, проходящей через данную прямую и касательной к поверхности вращения с криволинейной образующей, к трёхосному эллипсоиду и т. п. Однако в этих случаях усложняется построение плоской кривой — проекции данной поверхности на плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

Иначе обстоит дело с цилиндром и с конусом. Через произвольную («случайную») прямую, хотя бы и не пересекающую цилиндра (конуса), вообще говоря, нельзя провести касательную плоскость к нему.

Плоскость, касательную к цилиндру, можно провести только через такую прямую, которая: либо

1) параллельна образующим цилиндра (задача имеет два решения), либо

2) касается цилиндра (задача имеет одно решение).

Плоскость, касательную к конусу, можно провести только через такую прямую, которая: либо

1) проходит через вершину конуса (задача имеет два решения), либо

2) касается конуса (задача имеет одно решение).

§ 95. Проведение касательной плоскости к поверхности через заданную точку, не лежащую на поверхности

Начнём с цилиндра.

Пусть заданы цилиндр и точка вне его; требуется провести через данную точку плоскость, касательную к данному цилиндру.

Предварительно сделайте небольшой опыт.

Поставьте на стол цилиндр и приложите к его боковой поверхности линейку так, чтобы она представляла часть касательной к цилиндру плоскости (рис. 287). Перекатывая линейку по поверхности цилиндра, обведите её один раз вокруг него; совершенно очевидно, что когда линейка возвратится в первоначальное положение, то не останется ни одной точки пространства вне цилиндра, через которую не прошла бы дважды касательная к цилиндру плоскость. Следовательно, поставленная задача всегда имеет два решения.

Для построения плоскости, касательной к цилиндру и проходящей через данную точку A (рис. 288, а), проводим через эту точку плоскость P , перпендикулярную к образующим цилиндра. В плоскости P проводим из точки A две касательные к сечению цилиндра. Искомые две касательные плоскости определены каждая двумя прямыми: одной из касательных прямых (AK или AL) и одной из образующих цилиндра, именно той, которая проходит через соответствующую точку касания (K или L).

Всё выше сказанное о цилиндре целиком относится и к конусу (рис. 288, б).

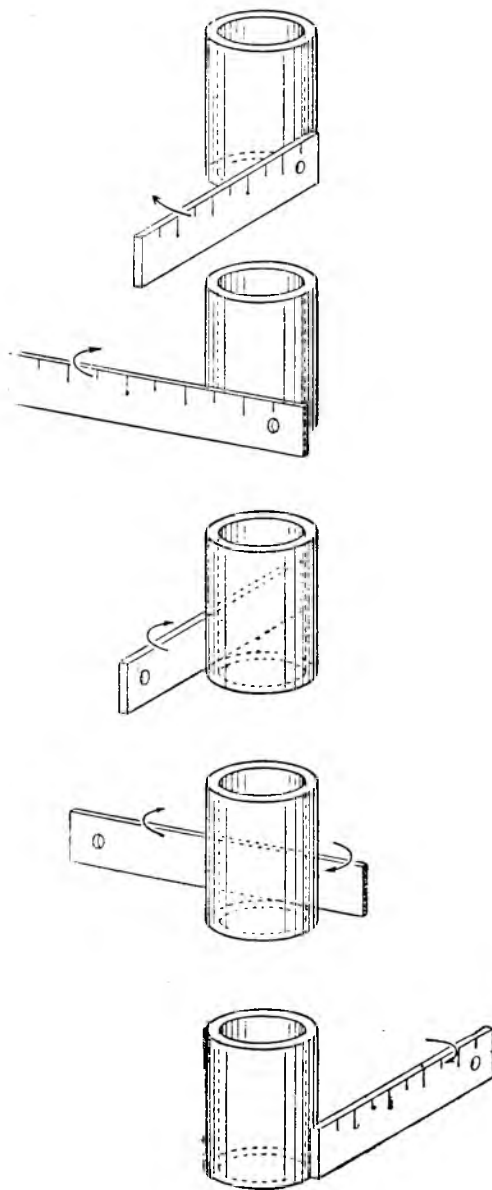


Рис. 287. Плоскости, касательные к цилиндру.

Пусть теперь заданная поверхность, к которой требуется провести касательную плоскость через заданную точку A , не лежащую на поверхности,—сфера с центром C (рис. 289).

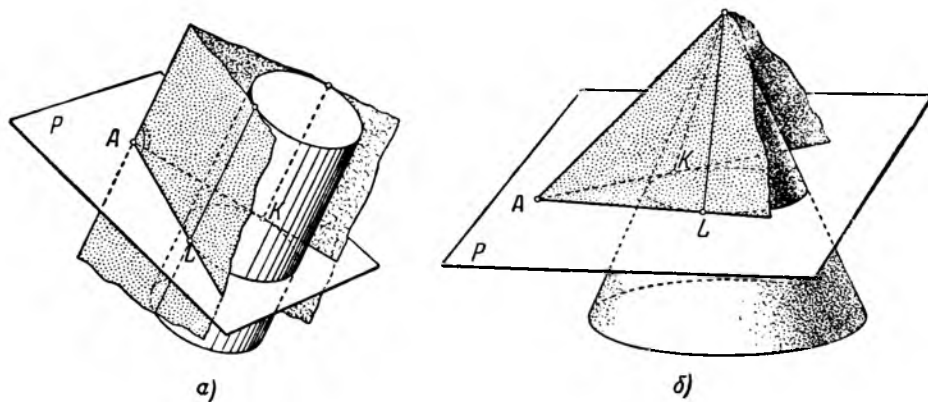


Рис. 288. Построение плоскостей, касательных к цилиндру (а) и конусу (б), проходящих через данную точку.

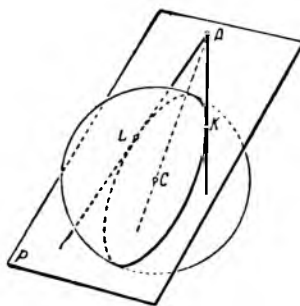


Рис. 289. К построению касательной плоскости к сфере.

Через прямую AC проводим в пространстве произвольную плоскость P : эта плоскость расщепит сферу по большому кругу; проведём из точки A две касательные AK и AL к большому кругу. Плоскости, проведённые через прямые AK и AL перпендикулярно к плоскости P , будут касательными к сфере.

Если бы мы провели через прямую AC вместо плоскости P плоскость P' , то получили бы другую пару плоскостей, проходящих через данную точку A и касательных к данной сфере. Таким образом, данная задача имеет бесчисленное множество решений; это—плоскости, касательные к круговому конусу, вершина которого—точка A , ось— AC , а одна из образующих— AK .

У п р а ж н е н и е. Решить на эпюре все задачи, изложенные в этом параграфе.

§ 96. Проведение касательной плоскости к конусу или цилиндру параллельно заданной прямой

Дан конус и прямая AB (рис. 290); требуется провести плоскость, касательную к конусу и параллельную AB .

Проводим через вершину S конуса прямую SC , параллельную AB . Через прямую SC проводим две плоскости, касающиеся конуса по образующим SD и SE . Задача решена.

Дан круговой цилиндр и прямая AB (рис. 291); требуется провести плоскость, касательную к цилиндру и параллельную AB .

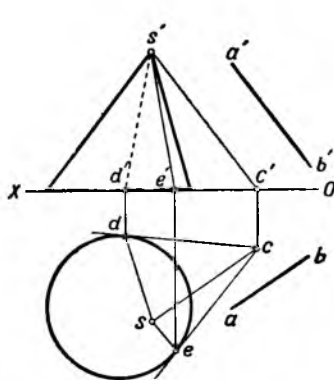


Рис. 290. Построение касательной плоскости к конусу параллельно данной прямой.

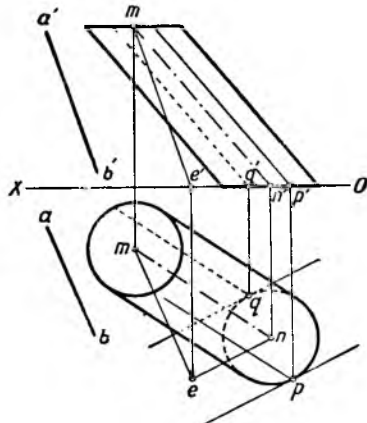


Рис. 291. Построение касательной плоскости к цилиндру параллельно данной прямой.

Через точку M , взятую на оси MN цилиндра, проводим прямую ME , параллельную AB . Соединяем E с N . В плоскости H проводим две касательные к основанию цилиндра, параллельные en ; точки касания обозначим P и Q . Каждая касательная, вместе с проведённой через точку касания образующей цилиндра, определит плоскость, удовлетворяющую поставленным условиям.

§ 97. Проведение касательной плоскости, параллельной заданной плоскости

Построим плоскость, касательную к сфере и параллельную заданной плоскости R (рис. 292).

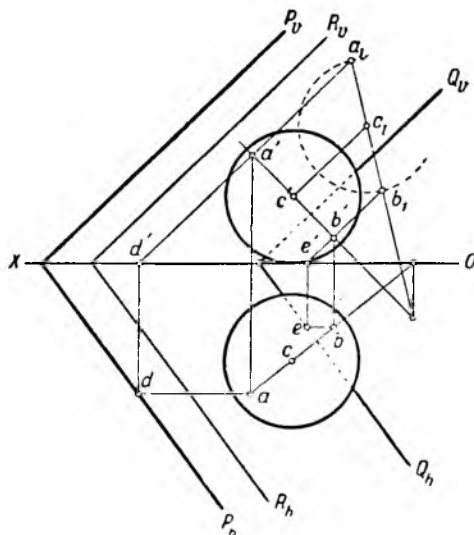


Рис. 292. Построение плоскости, касательной к сфере и параллельной данной плоскости.

Опустим из центра C сферы перпендикуляр на плоскость R . Он пересечёт сферу в двух точках A и B , которые и являются точками касания (почему?).

Таким образом, построение сводится к:

- 1) нахождению точек A и B (проводим $c'a' \perp R_v$, $ca \perp R_h$ и заменяем одну из плоскостей проекций);
- 2) проведению через точки A и B плоскостей P и Q , параллельных плоскости R (при помощи фронталей AD и BE).

Задача «построить плоскость, касательную к данной поверхности и параллельную данной плоскости», имеет для сферы два решения при любом положении плоскости. Эта же задача для произвольной поверхности имеет решение не при любом положении заданной плоскости, а только при некоторых.

Так, например, для цилиндра данная задача может быть решена только в том случае, если заданная плоскость P параллельна образующим цилиндра. Решается эта задача так: проводим вспомогательную плоскость Q , перпендикулярную к образующим цилиндра; в плоскости Q получим плоскую кривую линию—направляющую цилиндра и прямую линию—след плоскости P . В плоскости Q проводим касательную прямую AB к направляющей, параллельную следу P_Q . Плоскость R , проходящая через касательную AB и параллельная плоскости P ,—искомая.

Для конуса задача возможна только в том случае, если заданная плоскость параллельна одной (и только одной!) из образующих конуса.

ГЛАВА XIV

ТЕНИ

§ 98. Геометрия тени

Опыт показывает, что свет распространяется прямолинейно: от светящейся точки лучи света идут по прямым линиям. Непрозрачный предмет, помещённый на пути лучей света, «перехватывает» упавшие на него лучи и образует позади себя неосвещённое пространство, называемое *тенью*.

Положите на стол лист белой бумаги и поставьте на него карандаш (рис. 293). Направьте на лист пучок лучей света: бумага и карандаш освещены. Если бы карандаша не было, был бы освещён весь лист, карандаш же перехватывает ту часть лучей, которая падает на него (точнее—на те его грани, которые обращены к свету), и отбрасывает от себя на бумагу *тень*.

Тень, падающая от карандаша на бумагу, называется *падающей* тенью; неосвещённая часть карандаша находится в *собственной* тени.

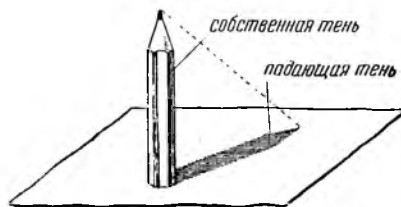


Рис. 293. Тень карандаша на плоскость.

В начертательной геометрии изучаются методы построения теней от тел, заданных своими проекциями. При этом обычно предполагают, что лучи света параллельны (например, лучи солнца); поэтому направление лучей света задаётся при помощи прямой. В большинстве случаев за направление лучей света принимают направление диагонали куба, две грани которого лежат в плоскостях проекций (рис. 294, а). Проекции этого направления—прямые, наклонённые под углом 45° к оси OX (рис. 294, б).

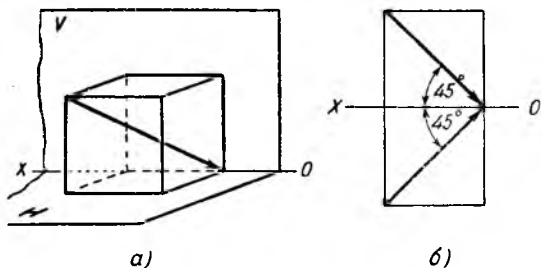


Рис. 294. Направление световых лучей, принятое в начертательной геометрии.

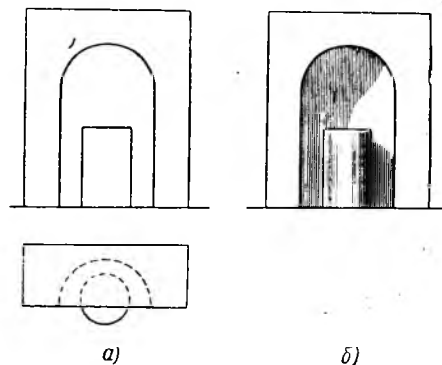


Рис. 295. Значение теней для чертежа.

Тени строят для придания большей наглядности изображениям на эюре. На рис. 295, а даны две проекции, на рис. 295, б—только вертикальная проекция, но с тенями. Преимущества второго чертежа очевидны.

Построение теней широко применяется в архитектуре для более наглядного изображения на чертеже строящегося здания или сооружения.

§ 99. Тень точки

Пусть даны точка и направление световых лучей (черт. 296). **З а д а ч а** — найти тень от точки на плоскости проекций.

Проведём через данную точку A луч света, т. е. прямую, параллельную данному направлению, и найдём точку A_0 — пересечение этой прямой с **п е р в о й** из плоскостей проекций, которую она встретит. Этой плоскостью на рис. 296 оказывается плоскость V .

Точка A_0 и есть тень точки A на V . *Тень точки на данной плоскости есть не что иное, как след луча света, проходящего через эту точку, на этой плоскости.*

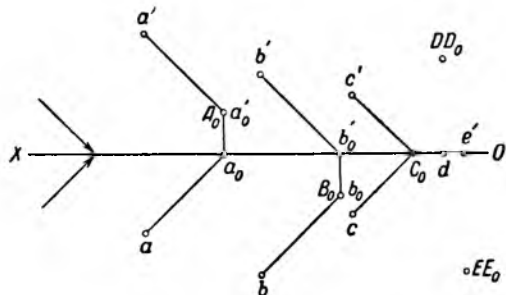


Рис. 296. Тени точек на плоскостях проекций.

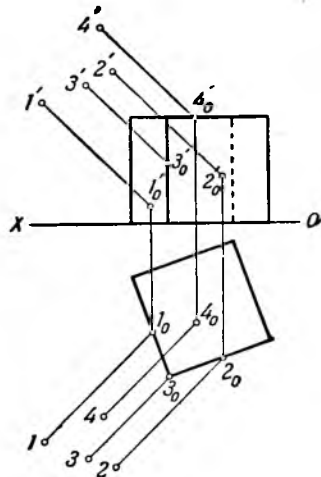


Рис. 297. Тени точек на поверхности куба.

Тень точки B при том же направлении лучей света лежит на плоскости H , это — точка B_0 . Тень точки C (точка C_0) оказывается лежащей на оси OX . Тень точки D , лежащей на плоскости V , а также тень точки E , лежащей на плоскости H , совпадают с самой точкой.

От тени точки на плоскости проекций H или V перейдём к тени точки на другие плоскости.

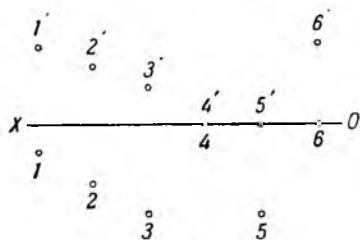


Рис. 298. Постройте тени точек на плоскости проекций.

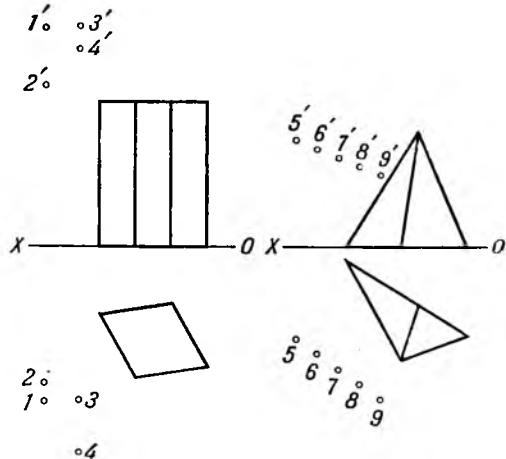


Рис. 299. Постройте тени точек на поверхности призмы и пирамиды.

Дан куб, стоящий на плоскости H , и четыре точки: 1, 2, 3 и 4 (рис. 297). Найти тени этих точек на поверхности куба.

Проведём через точки 1, 2, 3 и 4 лучи обычно принятого направления и найдём точки пересечения этих лучей с поверхностью куба.

Луч, проведённый через точку 1, встретит куб в точке 1_0 на левой грани куба. Следовательно, точка 1_0 — тень точки 1. Луч, проведённый через точку

2, встречает куб в точке 2_0 на правой грани куба. Луч, проведённый через точку 3, встречает куб в точке 3_0 на ребре куба. Наконец, луч, проведённый через точку 4, встречает куб в точке 4_0 на верхней грани.

У п р а ж н е н и я 1. Найти тени точек 1, 2, 3, 4, 5 и 6 на плоскости проекций (рис. 298).
2. Постройте тени, падающие от точек на призму и на пирамиду (рис. 299).

§ 100. Тень отрезка прямой

Вернёмся к освещённому карандашу (рис. 300, а), который будем принимать за отрезок прямой. Падающие на него лучи, а также отбрасываемая им тень образуют плоскость, вполне определённую этим отрезком и направлением лучей света.

Отбрасываемая карандашом тень падает на бумагу, лежащую на столе.

Так как линия пересечения двух плоскостей—прямая, то *тень от прямой на плоскость—прямая*.

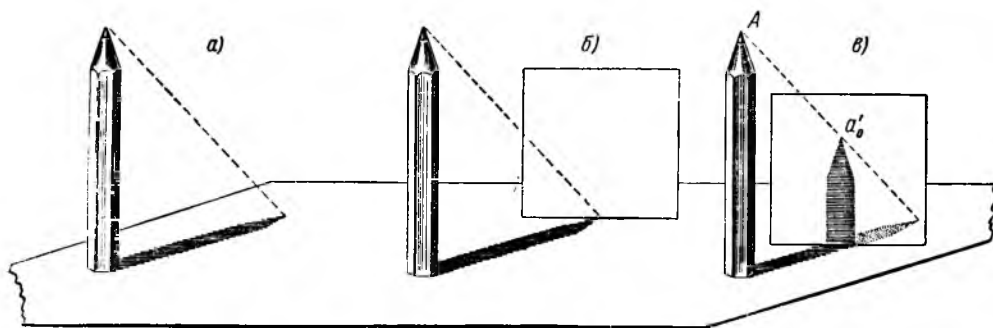


Рис. 300. Тень карандаша на две плоскости.

Поставьте на стол вертикально лист бумаги вне падающей от карандаша тени (рис. 300, б), затем придвиньте лист бумаги к карандашу (рис. 300, в). Что при этом произойдёт?

Та часть падающей от карандаша тени, которая оказалась перед листом бумаги, осталась без изменений. Луч света, проходящий через конец A карандаша, на этот раз не дойдёт до поверхности стола: он встретит на пути непрозрачный лист бумаги и даст на нём тень от кончика карандаша—точку a'_0 . Очевидно, *тень от вертикальной прямой на вертикальную плоскость—вертикальная прямая*. Участок тени от верхней части карандаша вполне определён точкой a'_0 , а также и точкой встречи тени на горизонтальную плоскость с вертикальной плоскостью.

Переведём теперь наш опыт с карандашом на язык начертательной геометрии. Рассмотрим задачу: найти тень отрезка AB на плоскости проекций (рис. 301, а). Левый конец отрезка (точка A) лежит в плоскости H .

Находим последовательно: 1) тень точки A —точку a_0 (она совпадает с самой точкой A и находится на плоскости H) и 2) тень точки B —точку b_0 (она также находится на плоскости H). Соединив точки a_0 и b_0 прямой линией, мы получим отрезок a_0b_0 —тень отрезка AB . Эта тень лежит целиком на плоскости H ; на V отрезок AB тени не даёт. Тень c_0 произвольной точки C , лежащей на прямой AB , может находиться только на a_0b_0 .

Если мы переместим плоскость V в новое положение, определяемое на том же рисунке 301, а пунктирной линией $O'X'$, то тень a_0b_0 отрезка AB не изменится: для её изменения нет никаких оснований. Этот изменённый эпюр дан на рис. 301, б; ось проекций обозначена теперь $O'X'$.

Переместим плоскость V в третье положение, определяемое на рис. 301, 6 линией $O''X''$ так, что она пересечёт тень a_0b_0 (рис. 301, в). На этот раз тень

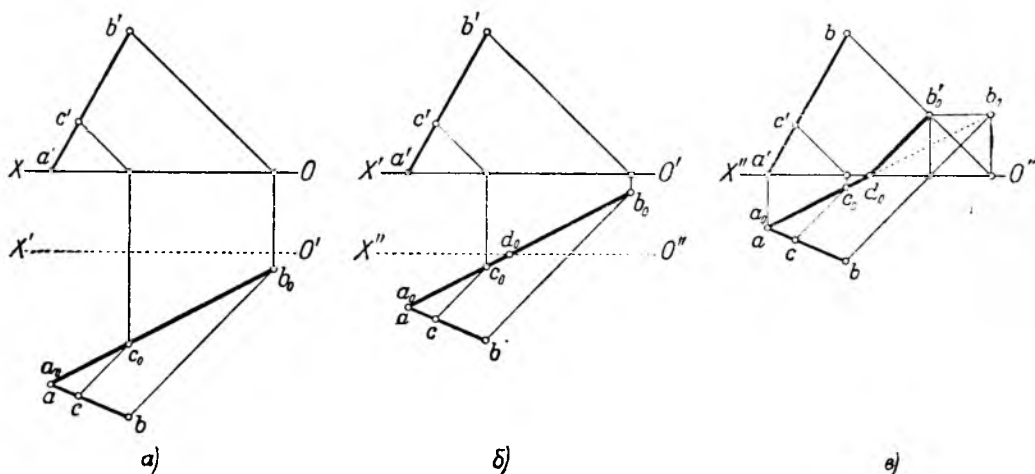


Рис. 301. Тень прямой на плоскостях проекций.

отрезка AB на плоскости проекций будет иной; участок a_0d_0 тени (от a_0 до встречи a_0b_0 с $O''X''$ в точке d_0) останется без изменения, но точка B даст на этот раз тень не на плоскость H , а на плоскость V , именно точку b'_0 (как это было в примере с карандашом). Соединив d_0 с b'_0 , получим ломаную $a_0d_0b'_0$ — тень отрезка AB на плоскости H и V с переломом в точке d_0 на оси $O''X''$.

Заметим, что при направлении лучей по диагонали куба отрезок $b_0b'_0$ параллелен оси проекций.

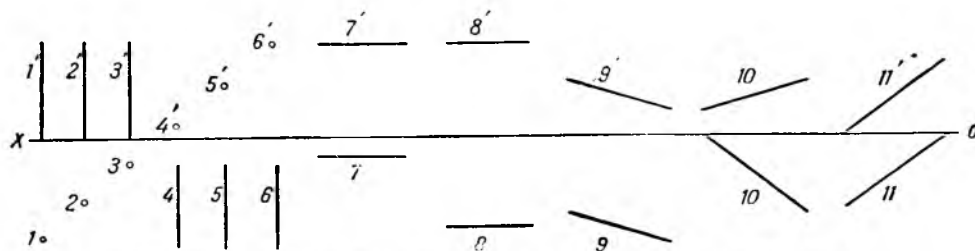


Рис. 302. Постройте тени этих прямых на плоскостях проекций.

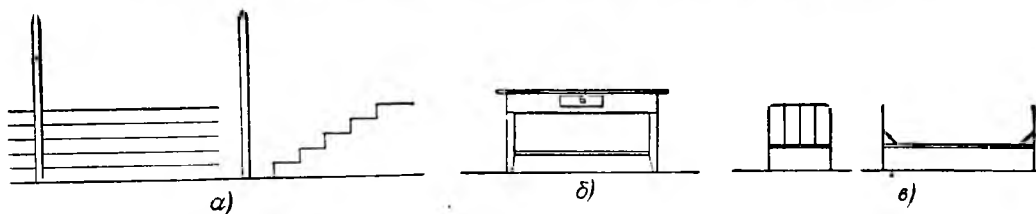


Рис. 303. Примеры на построение теней.

У п р а ж н е н и я. 1. Постройте на плоскостях проекций тени одиннадцати прямых, данных на рис. 302.

2. Постройте тень столба на ступеньки лестницы (рис. 303, а).

3. Постройте тень, падающую от стола на плоскость пола (H), если ширина стола равна $\frac{1}{3}$ его длины (рис. 303, б).

4. То же, повернув стол вокруг вертикальной оси на 30° , 45° , 60° и 90° ; то же, выдвинув ящик; то же, выпнув ящик.

5. Постройте тень, падающую от койки на плоскость пола (рис. 303, в).

Построим теперь тень, падающую от отрезка AB не на плоскость проекций, а на некоторую плоскость P , заданную следами (рис. 304).

Здесь могут оказаться три различных случая.

1) Лучи AA_0 и BB_0 , проведённые через концы A и B отрезка, встречаются прежде всего плоскость P в точках A_0 и B_0 (рис. 304, а). Соединив A_0 с B_0 , получаем искомую тень в виде двух её проекций a_0b_0 и $a'_0b'_0$.

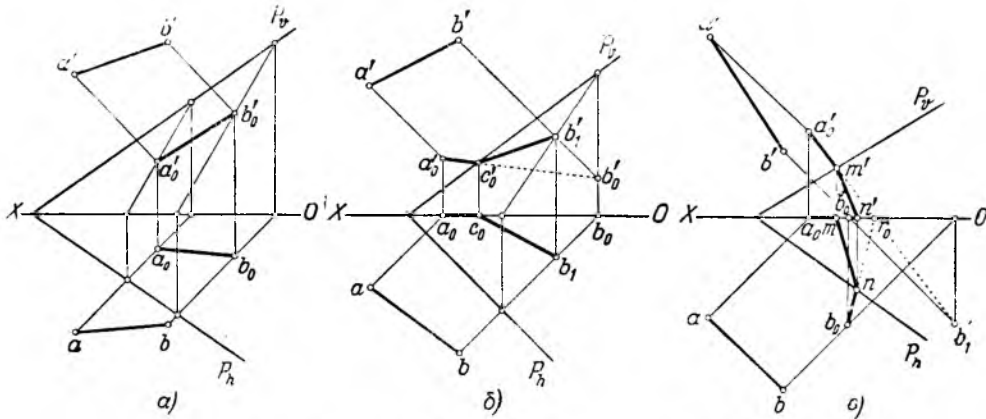


Рис. 304. Тень прямой на плоскость P .

2) Один из двух лучей, проведённых через концы отрезка, встречается данной плоскостью P (в точке B , рис. 304, б). Другой же луч встретится с плоскостью проекций (в данном случае с плоскостью V в точке A_0).

Соединив a'_0 с b'_0 (где b'_0 — тень точки B на плоскости V , построенная в предположении, что плоскости P нет), получим $a'_0c'_0$ (где C_0 — точка встречи A_0B_0 с P_v) — часть тени, падающую на V . По предыдущему находим точку B_1 . Соединив C_0 с B_1 , получим вторую часть тени.

Итак, искомая тень AB есть $A_0C_0B_1$, т. е. ломаная линия, имеющая один перелом — в точке C_0 .

3) Тени A_0 и B_0 концов A и B отрезка падают на разные плоскости проекций (рис. 304, в); соединив a'_0 с b'_1 , определяем a'_0m' — участок тени на V ; соединив b_0 с r_0 , определяем b_0n — участок тени на H ; соединив M и N , определяем участок тени на P ; искомая тень — A_0MNB_0 , т. е. ломаная линия, имеющая два перелома. Одна её часть A_0M лежит на плоскости V , другая MN — на плоскости P и третья NB_0 — на плоскости H .

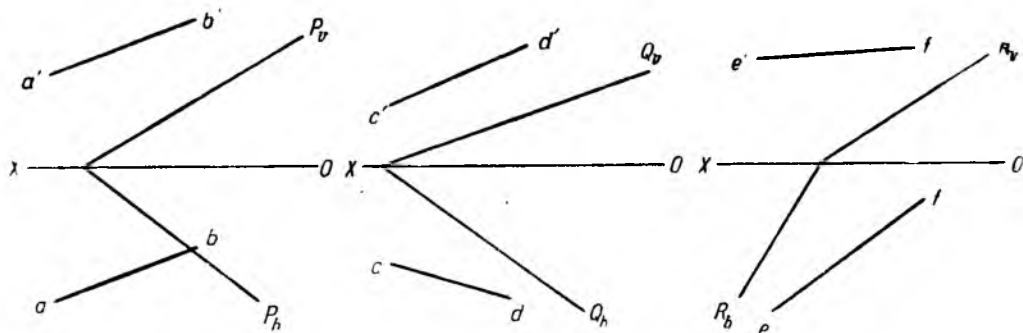


Рис. 305. Постройте тени этих прямых на плоскости, заданные следами.

У п р а ж н е н и я. 1. Постройте тени отрезков на плоскости, заданные следами (рис. 305).

2. Откройте одну створку окна (рис. 306, а) на 90° , на 60° , на 135° и постройте тени; откройте другую створку на такие же углы и тоже постройте тени.

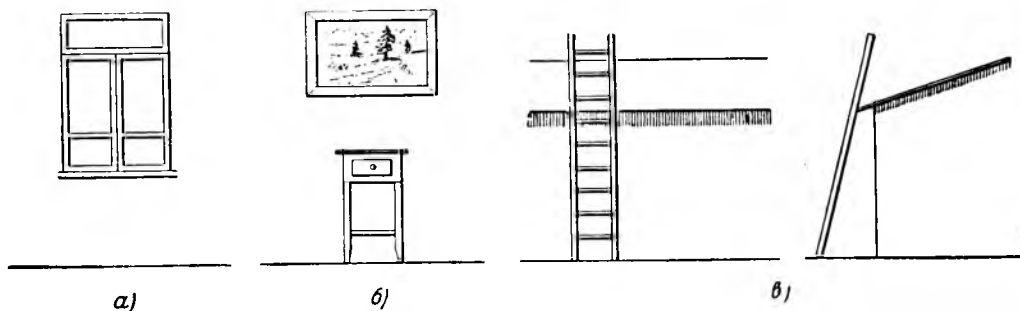


Рис. 306. Примеры на построение теней.

3. Постройте тени (рис. 306, б), падающие на стену от квадратной тумбочки и от картины, если картина образует со стеной угол 10° , 20° , 30° .

4. Постройте тень от приставной лестницы на стену и на крышу сарая (рис. 306, в).

§ 101. Собственная и падающая тени плоской фигуры

Переходим к изучению тени плоской фигуры, которую мы будем считать непрозрачной пластинкой.

Прежде всего научимся узнавать по чертежу, какая из двух сторон фигуры освещена.

На рис. 307 изображены два треугольника ABC и DFE .

От пластинок ABC и DFE падают на плоскость тени abc и def . Мы видим, что если смотреть на пластинку по направлению лучей, то освещённая сторона пластинки и падающая от неё тень читаются одинаково: ABC и abc , DEF и def *). Значит, неосвещённая сторона пластинки и падающая от неё тень читаются в обратном порядке (ACB и abc , DFE и def).

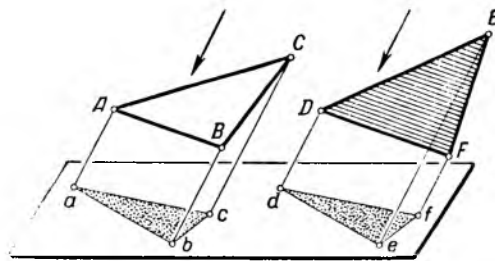


Рис. 307. Какая сторона треугольной пластинки освещена?

Обратно: если пластинка и падающая от неё тень читаются одинаково, то данная сторона пластинки освещена; в противном случае она не освещена.

Про неосвещённую сторону пластинки говорят, что она находится в собственной тени. На рис. 307 штриховка на треугольнике DFE обозначает собственную тень.

Эти правила распространяются не только на треугольники, но и на любые плоские фигуры.

На рис. 308 дано пять различных треугольников, причём их горизонтальные проекции одинаковы.

Построение падающей тени и определение освещённой и теневой сторон треугольника в каждом отдельном случае не представляют затруднений. Вертикальные проекции всех пяти треугольников выбраны так, что эти случаи отличаются друг от друга следующим:

*) Напоминаем (см. § 31), что мы условились читать вершины плоской фигуры в направлении против часовой стрелки.

На рис. 308, *а* треугольник проектируется и на вертикальную и на горизонтальную плоскости проекций освещённой стороной $1-2-3$.

На рис. 308, *б* на вертикальную плоскость проектируется освещённая сторона $1-3-2$ треугольника, на горизонтальную — неосвещённая $1-2-3$.

На рис. 308, *в* на вертикальную плоскость проектируется неосвещённая сторона $1-3-2$ треугольника, на горизонтальную — освещённая $1-2-3$.

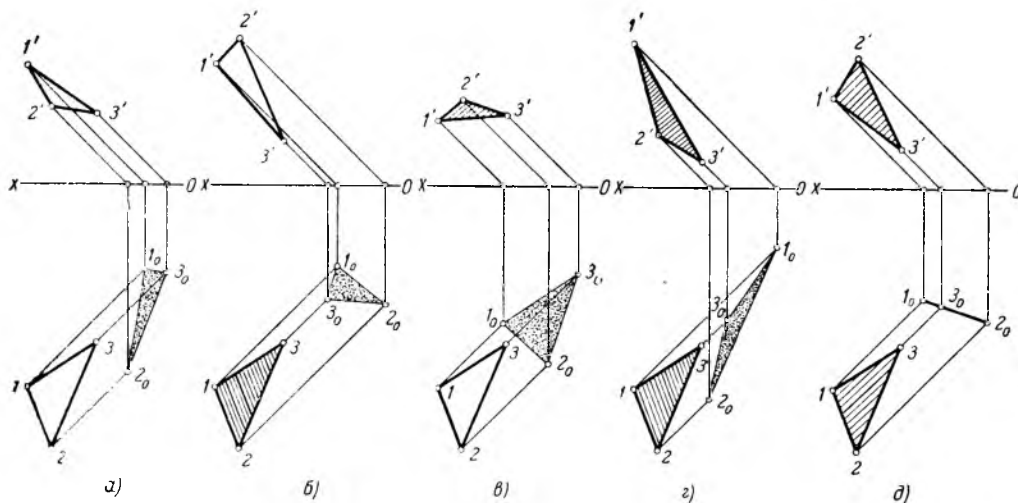


Рис. 308. Собственная и падающая тени треугольника (различные случаи).

На рис. 308, *г* треугольник проектируется на обе плоскости проекций теневой стороной $1-2-3$.

На рис. 308, *д* падающая тень треугольника — отрезок; в этом случае лучи света скользят по плоскости треугольника (треугольник расположен в плоскости лучей света). Ни об одной из сторон треугольника нельзя сказать, что она освещена, или что она находится в собственной тени. Поэтому обе проекции треугольника покрыты редкой штриховкой.

На рис. 309 изображён параллелограм. Требуется найти его падающую тень, а на проекциях указать собственную тень (т. е. показать штриховкой, какая из сторон параллелограмма находится в тени).

Строим тень каждой вершины параллелограмма на плоскости проекций. Все они попадают на плоскость H . Так как тени двух параллельных прямых параллельны, то *тень параллелограмма, падающая на плоскость, — параллелограм*.

Переходим к вопросу о собственной тени.

Тень параллелограмма читается так: $I_0-2_0-3_0-4_0$. Следовательно, сторона $1-2-3-4$ параллелограмма освещена, а обратная сторона — в тени. Поэтому вертикальная проекция $1'-2'-3'-4'$ параллелограмма на рисунке светлая, а горизонтальная проекция $1-2-3-4$ заштрихована.

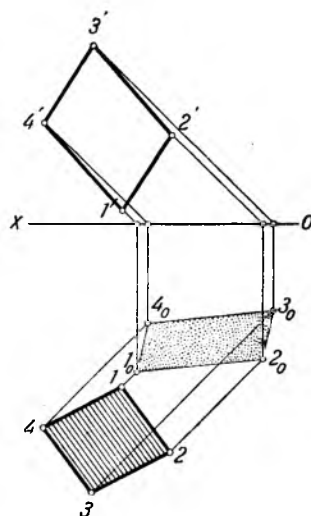


Рис. 309. Тень параллелограмма.

Во всех рассмотренных до сих пор примерах тень плоской фигуры падала целиком на одну плоскость проекций. Могут быть, однако, и иные случаи.

Построим тень, падающую от треугольной пластинки ABC (рис. 310). Точка C находится на плоскости H , следовательно, c_0 совпадает с c . Найдя тень точки A (точку a_0 , которая также оказалась на плоскости H), соединим c_0 с a_0 и получим тень стороны CA .

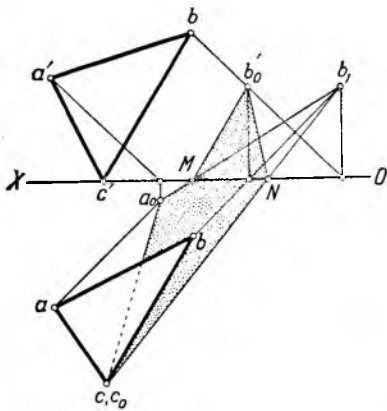


Рис. 310. Случай излома тени треугольника.

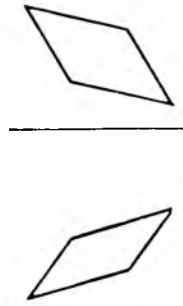


Рис. 311. Найдите тень этого параллелограмма.

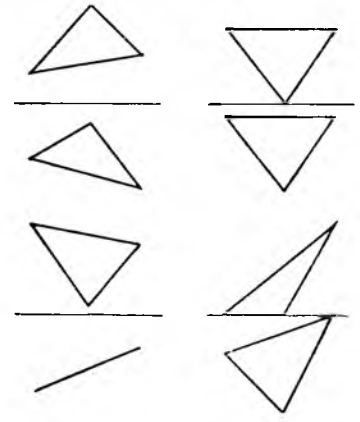


Рис. 312. Постройте тени этих треугольников.

Несколько иначе обстоит дело с вершиной B —её тень падает не на плоскость H , а на плоскость V . Поэтому тени сторон AB и BC находим по правилу, указанному в предыдущем параграфе, а именно: строим точку b_1 , которая определит «точки перелома» M и N .

- Упражнения. 1. Найдите тень параллелограмма (рис. 311).
2. Постройте тени четырёх треугольников (рис. 312).

§ 102. Собственная и падающая тени тела

Рассмотрим тело произвольной формы, освещённое пучком параллельных лучей (рис. 313). Линия $ABCD$ этом теле, отделяющая освещённые точки тела от неосвещённых, называется *контуром собственной тени*. Часть поверхности тела по одну сторону от этого контура освещена, а другая часть находится в *собственной тени*.

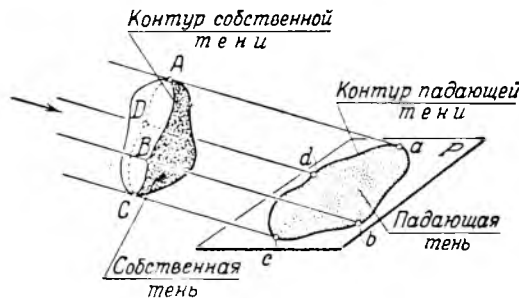


Рис. 313. Собственная и падающая тени тела.

Каждой точке A, B, C, \dots этого контура соответствует точка a, b, c, \dots на границе (контуре) тени, падающей от тела на плоскость P ; поэтому *контур падающей тени является тенью, падающей от контура собственной тени*.

Рассмотрим несколько примеров на построение теней различных тел.

1. На плоскости H стоит треугольная пирамида $SABC$ (рис. 314, a). Тени точек A , B и C , лежащих на H , совпадают с самими этими точками. Тень вершины S —точка s_0 . Соединив s_0 с a и c , получим контур as_0c падающей от пирамиды тени.

Так как контур падающей тени является тенью, падающей от контура собственной тени, то контур собственной тени— ASC .

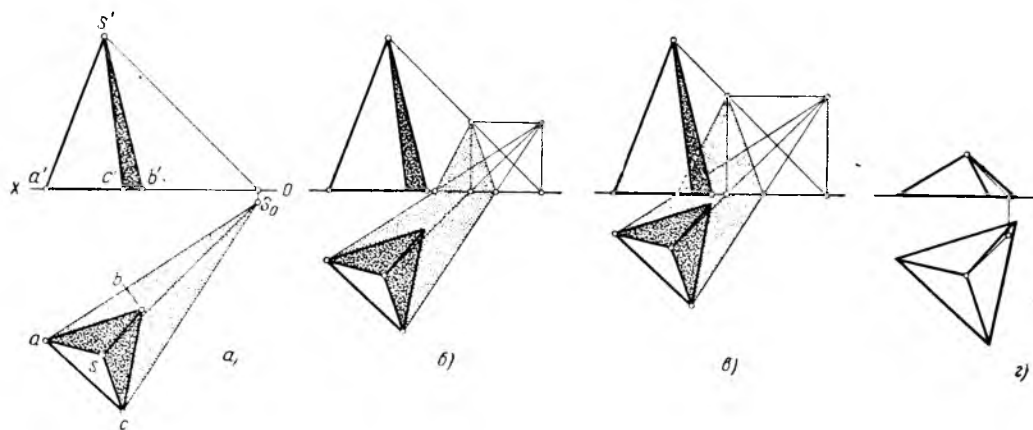


Рис. 314. Тень пирамиды.

У данной пирамиды освещена лишь грань ASC , остальные грани—в тени. Это показано на чертеже как на горизонтальной, так и на вертикальной проекциях. Заметим, что на вертикальной проекции видима только одна из неосвещённых граней— SBC , грань же SAB невидима.

Подвинем ту же пирамиду ближе к плоскости V (рис. 314, b) и повторим те же рассуждения. Этот случай отличается от предыдущего тем, что часть тени от пирамиды падает на плоскость H , часть—на плоскость V . Построив тень точки S на плоскости V и вспомогательную точку, которая была бы тенью S на плоскости H , если бы плоскость V была убрана с дороги падающих лучей, мы легко найдём точки перелома контура падающей тени.

Подвинем пирамиду ещё ближе к плоскости V (рис. 314, c); этот случай отличается от предыдущего тем, что часть тени, падающей от пирамиды на V , закрыта на вертикальной проекции самой пирамидой.

На рис. 314, d дана треугольная пирамида с малой высотой. Тень вершины оказывается внутри основания. В данном случае тень, падающая от пирамиды, совпадает с основанием, которое является единственной неосвещённой (и вместе с тем невидимой) гранью пирамиды. Покрывать штриховкой ничего не пришлось.

2. На рис. 315, a дан прямой круговой конус. s_0 —тень вершины S . Проведя из s_0 касательные s_0a и s_0b к кругу основания, получим as_0b —контур падающей тени; ASB —контур собственной тени.

Подвинем конус ближе к плоскости V (рис. 315, b). Построение теней в этом случае ясно из чертежа.

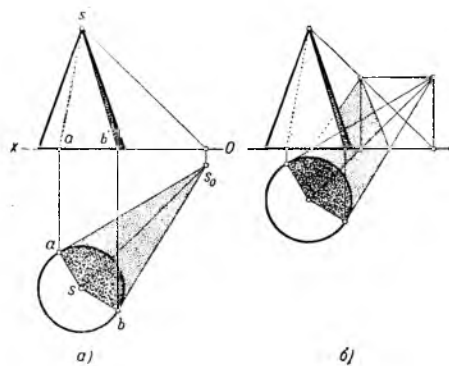


Рис. 315. Тень конуса.

3. На рис. 316, *a* изображена призма с квадратным основанием, стоящая на плоскости *H*, и её собственная и падающая тени. Падающая тень расположена целиком в плоскости *H*. Легко видеть, что тень $1_0-4_0-3_0-2_0$ от верхнего основания является таким же квадратом, как и основание призмы, причём $1_0-2_0 \parallel 1-2$ и т. д. (почему?).

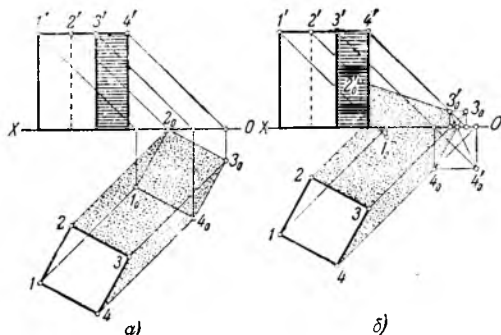


Рис. 316. Тень призмы.

Построение собственной и падающей теней не представит для читателя никаких затруднений. О рисунке 316, *б* см. ниже.

4. На рис. 317, *a* изображён прямой круговой цилиндр. Найдя тень, падающую от центра верхнего основания, строим круг, равный кругу основания, и получаем падающую тень верхнего основания; проведя

общие касательные к полученному кругу и к кругу основания цилиндра, получаем контур падающей тени. Теперь легко построить и контур собственной тени цилиндра; границей света и тени на боковой поверхности цилиндра являются образующие *A* и *B*.

Если призма и цилиндр расположены ближе к плоскости *V* (рис. 316, *б* и 317, *б*), то часть тени упадёт на плоскость *H*, а часть — на плоскость *V*. Точку перелома тени ребра $4-3$ призмы на оси *OX* можно найти двояко: как точку пересечения с этой осью тени 4_0-3_0 , или как точку пересечения с этой осью тени $4'_0-3'_0$.

Для построения тени верхнего основания цилиндра на плоскости *V* нужно найти тени нескольких его точек *1*, *2*, *3*, *4*, т. е. точки $1'_0$, $2'_0$, $3'_0$, $4'_0$ и соединить их плавной кривой. Эта тень переломилась на оси *OX*.

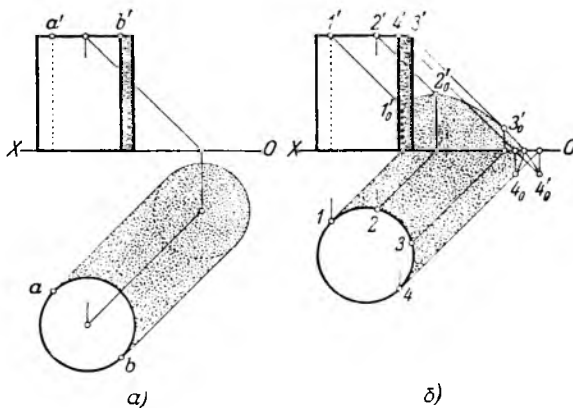


Рис. 317. Тень цилиндра.

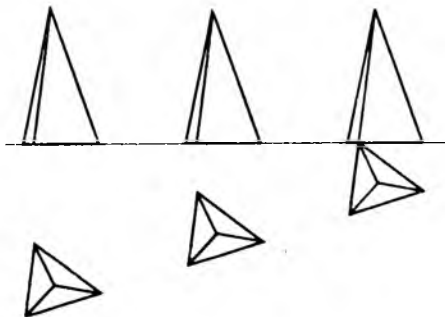


Рис. 318. Постройте тени этих пирамид.

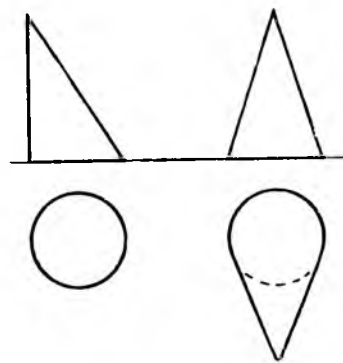


Рис. 319. Постройте тени этих конусов.

- У п р а ж н е н и я. 1. Постройте тени пирамид (рис. 318).
2. Постройте тени конусов (рис. 319).

§ 103. Метод обратных лучей

Рассмотрим следующую задачу: построить тень прямой KL на поверхность пирамиды $SABCD$ (рис. 320).

Эту задачу можно было бы решить, проведя через прямую KL плоскость, параллельную направлению лучей света, и построив линию сечения поверхности пирамиды этой плоскостью. Но существует более простой способ.

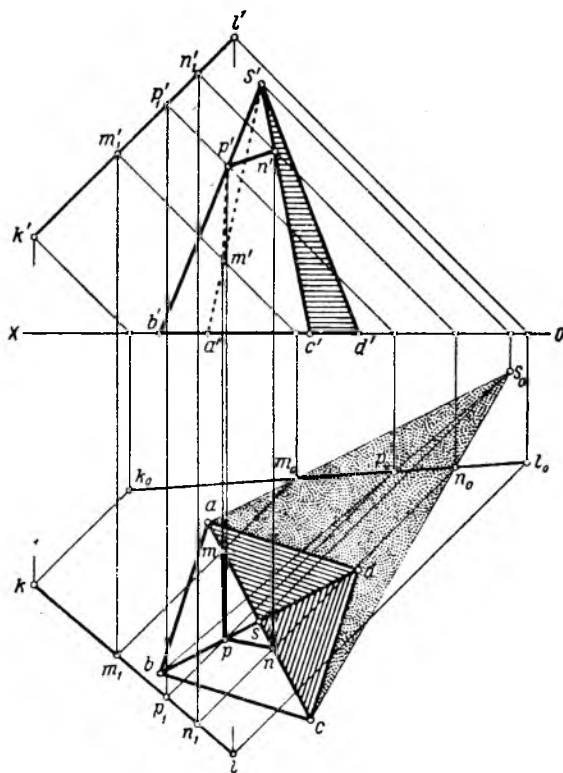


Рис. 320. Тень отрезка прямой линии, падающая на пирамиду.

Построим падающие на плоскость H тени прямой и пирамиды. Рассмотрим точку m_0 —общую точку тени прямой KL и тени ребра AS . В эту точку одновременно падает тень и от какой-то точки прямой KL и от какой-то точки ребра AS . Проведём через точку m_0 «обратный луч», т. е. прямую, параллельную направлению лучей света, но в обратном направлении. На пересечении этого луча с SA и KL получим точки M и M_1 —точки, тень которых падает в m_0 . Следовательно, точка M на пирамиде—тень точки M_1 прямой.

Аналогично помечаем точку n_0 (общую точку теней k_0l_0 и s_0c) и точку p_0 (общую точку теней k_0l_0 и s_0b). Зная n_0 и p_0 , находим N и P . (При решении находить точки M_1 , N_1 и P_1 не требуется.) Соединив точку P с точками M и N , находим тень, падающую от прямой на пирамиду.

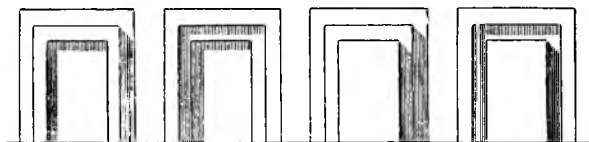


Рис. 321. Постройте планы.

У п р а ж н е н и я. 1. На рис. 321—четыре одинаковые вертикальные проекции части здания. Однако тени—разные. Постройте план для каждого случая.

2. Лыжные палки воткнуты в снег (рис. 322). Нельзя ли при помощи теней на снегу определить, соприкасаются эти палки или нет? В последнем случае определите тень, падающую от одной из палок на другую.

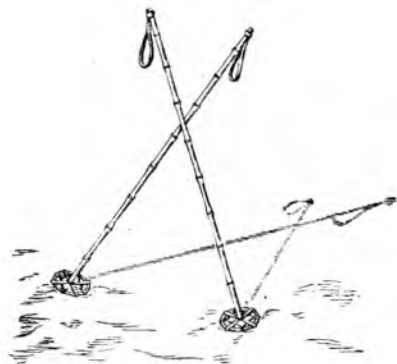


Рис. 322. Соприкасаются ли эти лыжные палки?

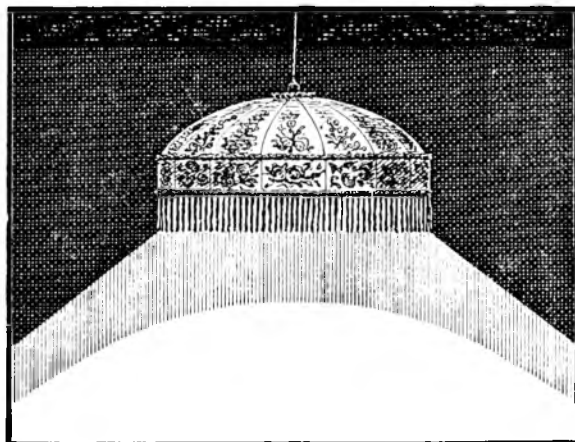


Рис. 323. Определите расстояние от шнура лампы до стены.

3. Найдите расстояние от шнура лампы до стены, на которую падает тень от круглого абажура (рис. 323).

ЧАСТЬ II

ДРУГИЕ МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ

ГЛАВА XV

АКСОНОМЕТРИЯ

§ 104. Достоинства и недостатки метода Монжа

Мы научились по двум (или трём) плоским чертежам—ортогональным проекциям—восстанавливать форму, размеры и положение оригинала и решать различные пространственные задачи.

Так, например, на рис. 324 даны две проекции куба—на плоскости H и V ; одна пара его граней параллельна горизонтальной плоскости проекций, а другая пара—вертикальной.

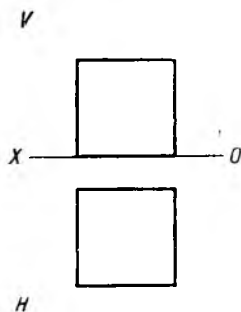


Рис. 324. Что здесь изображено?

По эскиру легко определить размеры куба и его положение относительно плоскостей проекций, нетрудно построить его развёртку и решить ряд других задач. В этом—достоинство метода Монжа.

Но почему мы уверены, что на рис. 324 изображён именно куб?

На рис. 325 изображено 50 предметов, имеющих точно такие же проекции на плоскости H и V , какие приведены на рис. 324.

Мы видим, что кроме куба (1) это могут быть: проволочные модели (2—4); поверхности—плоские (5—6) и кривые (7—14); комбинации двух квадратов (15—18), квадрата и прямоугольника (19—22), трёх плоских фигур (23—30); призмы (31—34); тела, ограниченные плоскими и кривыми поверхностями (35—50).

Читатель при желании может продолжить этот список и придумать ещё немало тел, которые имеют те же самые проекции на плоскости H и V .

Если мы обозначим на обеих проекциях буквами все восемь вершин куба (рис. 326, а), то наш эскир станет более определённым и многие предметы, изображённые на рис. 325, отсеются.

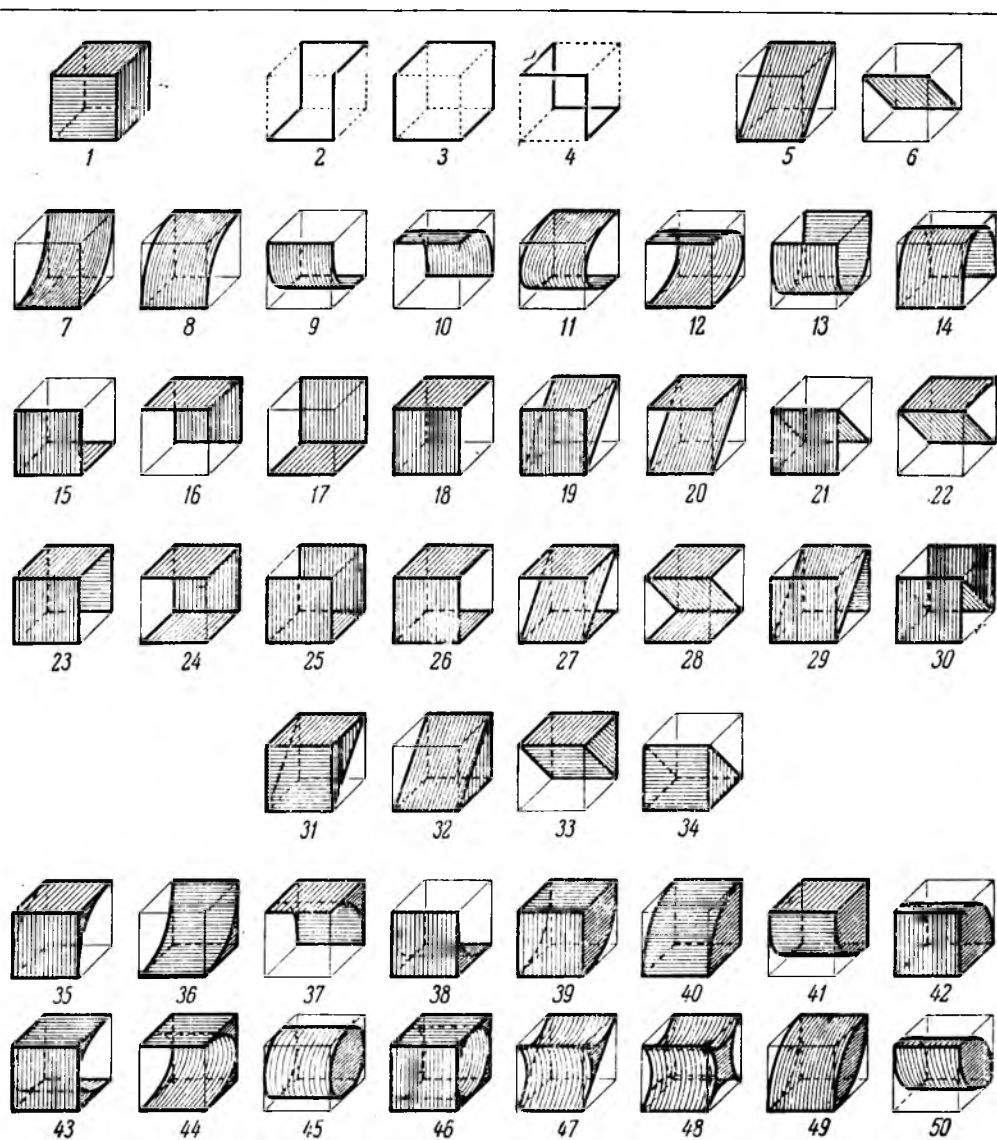


Рис. 325. Пятьдесят ответов на вопрос под предыдущим рисунком.

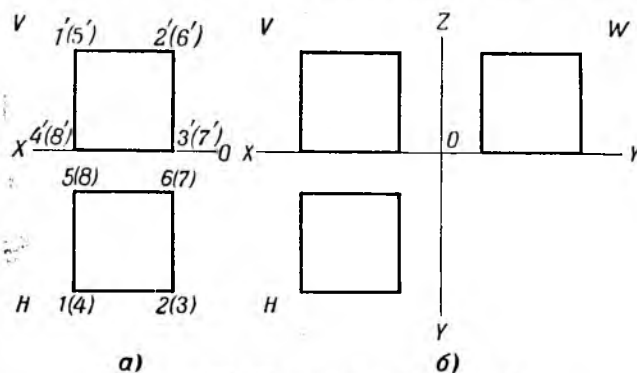


Рис. 326. Что здесь изображено?

Теперь уже нельзя принять изображённое тело за цилиндр (45 на рис. 325) или за призму (31). Однако всё-таки остаётся ещё ряд предметов, имеющих такие же две проекции (например, 48).

Даже три проекции предмета — на плоскости H , V и W — не всегда вполне определяют его.

На рис. 326, б даны три проекции куба. Но точно такие же три проекции имеет, например, кубическая коробка без крышки. Следовательно, и на рис. 326 мы не добились полной определённости и наглядности в изображении.

Именно отсутствие достаточной наглядности и определённости является серьёзным недостатком метода Монжа, особенно когда тело типа прямоугольного параллелепипеда расположено так, что все три его главных размера параллельны трём осям проекций.

Ортогональные проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости страдают ещё одним недостатком — они иногда требуют больше времени и больше бумаги для вычерчивания, чем другие способы изображения. Поэтому мы уже не раз прибегали к другим методам изображения, давая обычные, понятные без объяснений рисунки.

Теперь настало время изучить теорию этих изображений.

§ 105. Наглядные изображения куба в ортогональных проекциях

Итак, куб, расположенный так, что четыре его ребра перпендикулярны к плоскости H , а другие четыре — к плоскости V , не даёт достаточно наглядного изображения ни при проектировании на плоскость V , ни при проектировании на плоскость H , ни при наличии двух проекций, ни даже при наличии всех трёх проекций.

Поищем другие, более наглядные изображения куба при прямоугольном же проектировании. Для этого есть два пути: изменить положение тела относительно плоскостей проекций (метод вращения), или изменить плоскости проекций (метод перемены плоскостей проекций).

Изменяя плоскость V , мы получаем, например, такие изображения куба, как на рис. 327 (здесь изображено шесть вертикальных проекций куба при одной и той же его горизонтальной проекции). На этот раз при наличии двух проекций или даже всего одной проекции уже нельзя считать, что изображён какой-либо иной предмет, кроме куба (1), из 50 предметов рис. 325. Кроме того, некоторые проекции на рис. 327 выглядят гораздо живее, нагляднее, чем проекции на рис. 324 или 326.

Но отдельно взятые изображения тела на рис. 327 не свободны от недостатков.

В самом деле, какие у нас имеются основания утверждать, что на вертикальных проекциях рис. 327 изображены именно кубы?

Разве по одной проекции видно, что все 12 рёбер этого многогранника равны между собой?

Разве очевидно, что все 24 плоских угла при вершинах — прямые? Быть может, это не куб, а всего лишь параллелепипед — прямой, а может быть, даже и наклонный?

Если на эюре рис. 326 благодаря специальному расположению куба мы сразу могли легко измерить его рёбра и плоские углы его граней, то на рис. 327 этого непосредственно сделать нельзя.

Мало того, раньше мы научились при специальном положении тела производить на эюре различные построения. А теперь — при случайном расположении — возможно ли так же легко решать задачи на построение?

Не принесли ли мы удобство измерений и построений в жертву наглядности чертежа?

Ясно, что по одной проекции нельзя полностью судить об оригинале и нельзя решить любую задачу, относящуюся к этому оригиналу*).

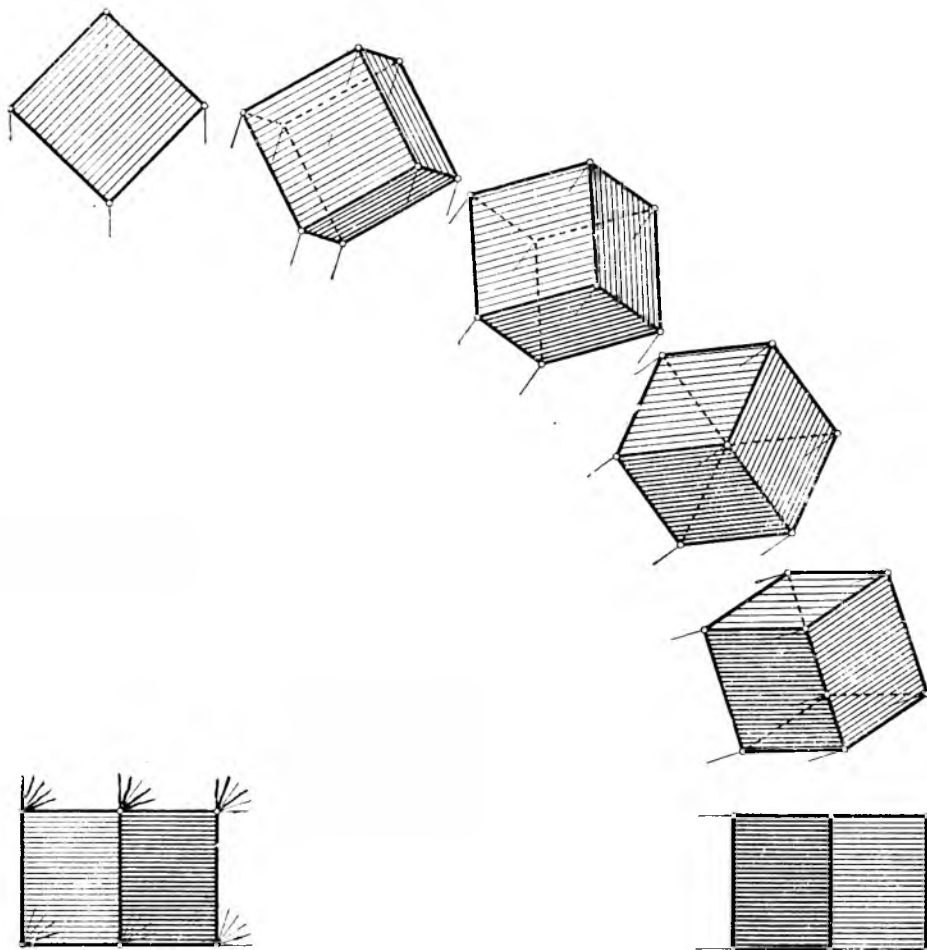


Рис. 327. Различные изображения куба, получаемые переменной плоскости V .

Но если добавить к чертежу некоторые данные, то одной проекции окажется достаточно для решения любых задач. Какие именно данные надо добавить—это и составляет содержание настоящей главы.

§ 106. Проекция координатных осей

Возвратимся к рисунку 324 (стр. 167). Как мы узнали, что это—куб, т. е. что все 12 рёбер этого многогранника равны между собой и что все его 24 плоских угла при восьми вершинах—прямые?

Это оказалось возможным лишь благодаря специальному расположению многогранника относительно осей проекций: все его рёбра параллельны этим осям. На рисунке же 327 мы пренебрегли осями: на этом эюре мы видим только то, что все 12 рёбер тела можно разбить на три группы по четыре параллельных и равных**) рёбра в каждой из них; но мы не можем сравнить

*) Некоторые специальные задачи можно решить и только на одной проекции. Мы их в этой книге рассматривать не будем.

**) Равенство и параллельность всех четырёх рёбер каждой группы следует (при параллельном проектировании) из равенства и параллельности соответствующих проекций.

рёбра одной группы с рёбрами другой или определить величины плоских углов при вершинах многогранника.

Так как оси проекций в своё время оказались весьма полезными, то исправим унушение, заключающееся в том, что мы при перемене плоскостей проекций на рис. 327 не захватили осей вместе с кубом. В дальнейшем мы будем рассматривать оригинал и твёрдо связанные с ним оси как единый геометрический образ. Эти оси с нанесёнными на них масштабами будем называть *координатными осями*.

На рис. 328, а изображён эпюр куба и, сверх того, на осях указан масштаб. Как мы видим, наш многогранник есть куб с ребром, равным одной единице масштаба.

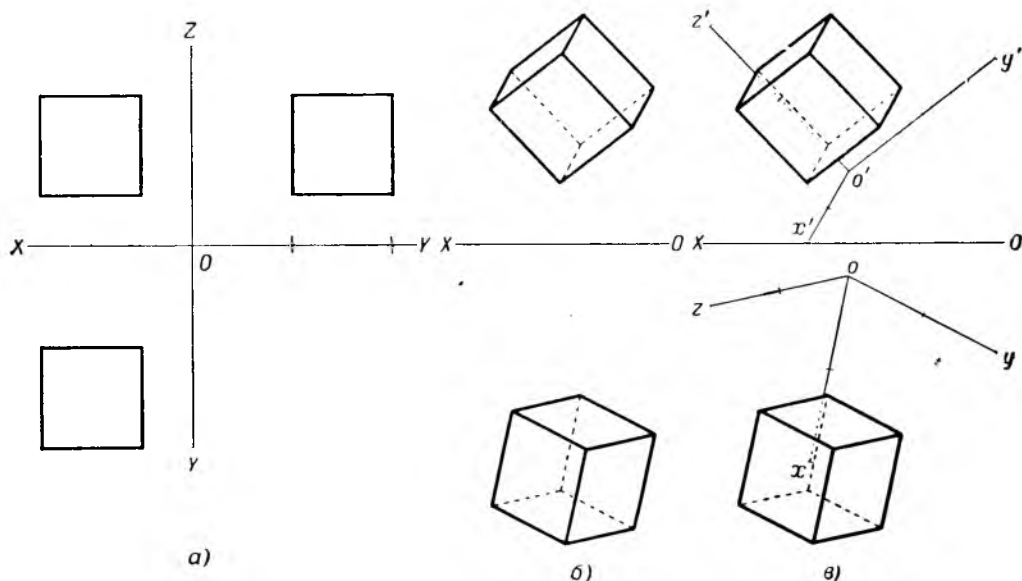


Рис. 328. Изображения куба: а) до поворота, б) после поворота, в) после поворота вместе с координатными осями.

На рис. 328, б куб повернут; по этому чертежу нельзя установить без особого построения, что перед нами именно куб.

На рис. 328, в к этому изображению добавлено ещё изображение координатных осей, твёрдо связанных с кубом. Другими словами, это—те же самые оси, что и на рис. 328, а; при повороте куба они повернулись вместе с ним.

Наличие на эпюре осей даёт возможность сделать некоторые выводы. Оси координат OX , OY и OZ взаимно перпендикулярны. На эпюре видно, что рёбра многогранника параллельны соответствующим координатным осям. Отсюда без всяких построений, только посмотрев на рис. 328, в, мы заключаем, что все 24 плоских угла нашего многогранника являются прямыми углами.

Для отрезков, принадлежащих параллельным прямым, искажение при проектировании одинаково. Поэтому *каждое из рёбер многогранника, изображённого на рис. 328, в, можно измерить единицей масштаба, указанной на оси, параллельной этому ребру*. Сделав эти измерения, мы убеждаемся, что все рёбра нашего многогранника равны между собой: каждое ребро равно единице масштаба.

Итак, благодаря тому, что на эпюре изображены проекции координатных осей, мы определили не только величины 24 плоских углов, но и

длины 12 рёбер, не производя для этого никаких построений. Оси координат оказались весьма полезными.

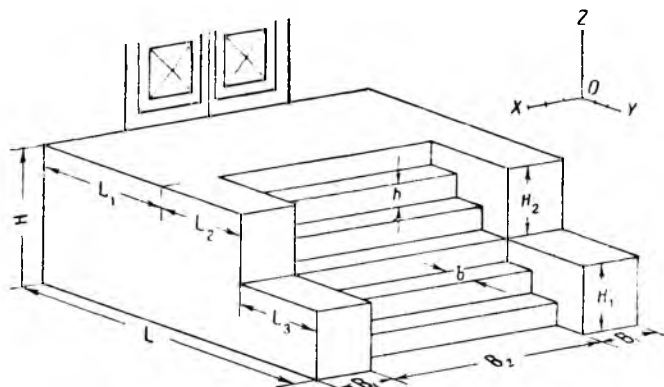


Рис. 329. Определите все размеры этого крыльца.

У п р а ж н е н и е. На рис. 329 дана одна проекция каменного крыльца и координатных осей с делениями через каждый дециметр (10 сантиметров). Определите все размеры, обозначенные стрелками. Зная эти размеры, можно выстроить крыльцо.

§ 107. Понятие об аксонометрии

Итак, для получения наглядного изображения куба оказалось целесообразным применить параллельное проектирование на плоскость проекций, не параллельную его граням. Этот же приём применяется для получения наглядных изображений и других тел.

При проектировании на плоскость, не параллельную отрезкам оригинала, мы получаем и с к а ж ё н н ы е изображения этих отрезков. Однако все отрезки, параллельные какому-либо одному направлению, проектируются с одинаковым искажением. Поэтому, зная, как проектируются отрезки, нанесённые на оси и имеющие длину, равную единице, мы без труда определим истинную величину отрезка, параллельного оси. Для этого достаточно измерить длину проекции отрезка при помощи делений, имеющихся на проекции оси, параллельной этому отрезку.

Но длину отрезка, не параллельного ни одной из осей координат, мы по такой проекции непосредственно (т. е. без вспомогательных построений или вычислений) определить не можем.

Метод изображения, заключающийся в том, что тело проектируется на одну плоскость вместе с координатными осями, твёрдо с ним связанными, называется аксонометрией).*

Если направление проектирования перпендикулярно к плоскости проекций, то аксонометрия—*прямоугольная* (рис. 330, а), а если не перпендикулярно, то—*косугольная* (рис. 330, б).

Много ли мы теряем в аксонометрии от того, что на изображении мы можем непосредственно измерить только те отрезки, которые параллельны одной из координатных осей (OX , OY или OZ)?

Многие предметы имеют форму прямоугольного параллелепипеда (например, шкаф, ящик, чемодан, дом, кирпич, резинка, брус, коробка папирос и т. д.) или содержат прямые линии и плоскости, параллельные рёбрам

*) Слово «аксонометрия» происходит от греческих слов: «аксос»—ось и «метрео»—измеряю. Таким образом, аксонометрия значит «измерение по осям». Аксонометрические проекции могут быть как параллельными, так и центральными. Для аксонометрии существенно лишь то, что оригинал проектируется (способ проектирования может быть любым) вместе с системой координат. В этой книге мы будем рассматривать только параллельную аксонометрию.

или граням прямоугольного параллелепипеда (например, кровать, стол, стул, этажерка и т. д.). Следовательно, многие «главные» размеры этих тел параллельны трём взаимно перпендикулярным осям. Поэтому, имея такого рода

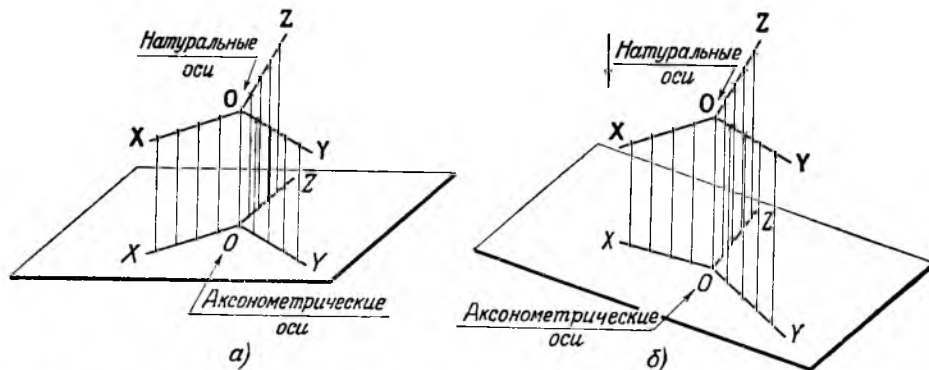


Рис. 330. а) Прямоугольная аксонометрия, б) косоугольная аксонометрия.

предмет, мы можем направить координатные оси параллельно его главным размерам и тогда получим вполне удобоизмеримое его аксонометрическое изображение.

Проекции координатных осей называются *аксонометрическими осями*. Сами же оси (оригиналы) называются *натуральными осями* (рис. 330).

До сих пор мы получали аксонометрические проекции тела из его ортогональных проекций. Но можно получить аксонометрическую проекцию тела и непосредственно, не строя его ортогональных проекций. Для этого достаточно выбрать подходящим образом оси координат и затем спроектировать (параллельно) тело вместе с осями на какую-либо плоскость проекций.

§ 108. Показатели искажения

Нетрудно доказать, что при параллельном проектировании все отрезки, параллельные какому-либо одному направлению, проектируются с одинаковым искажением (рис. 331):

$$\frac{ab}{AB} = \frac{cd}{CD} = \frac{ef}{EF} = \dots$$

Отношение длины аксонометрической проекции отрезка, параллельного

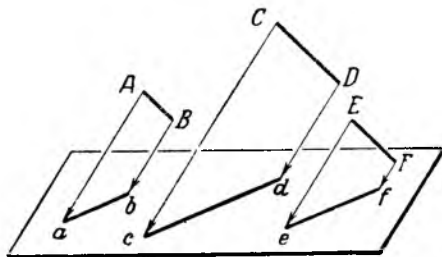


Рис. 331. Показатели искажения для параллельных отрезков одинаковы.

аксонометрической оси, к его истинной длине называется *показателем искажения по направлению данной оси*.

Показатель искажения по направлению оси OX будем обозначать p .
 Показатель искажения по направлению оси OY будем обозначать q .
 Показатель искажения по направлению оси OZ будем обозначать r .

Таким образом (рис. 332*),

$$p = \frac{OA}{OA'},$$

$$q = \frac{OB}{OB'},$$

$$r = \frac{OC}{OC'}.$$

Так как при прямоугольном проектировании проекция отрезка либо равна отрезку, либо меньше его и даже может превратиться в точку, то в *прямоугольной аксонометрической проекции каждый показатель искажения меньше единицы* или, в крайних случаях, равен единице или нулю.

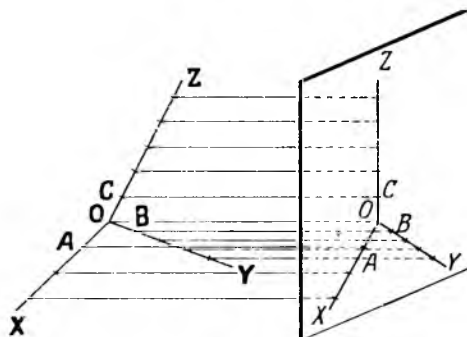


Рис. 332. Показатели искажения по координатным осям.

В косоугольной же аксонометрической проекции показатели искажения могут быть и больше единицы.

На каждой аксонометрической оси либо отмечается единица масштаба, либо указывается значение показателя искажения. В последнем случае для определения истинной величины любого отрезка, параллельного одной из осей, достаточно измерить проекцию этого отрезка и полученный результат разделить на соответствующий показатель искажения.

В зависимости от соотношения между тремя показателями искажения (по осям OX , OY и OZ) различаются проекции:

триметрические (все три показателя искажения различны),

диметрические (два показателя искажения одинаковы, а третий отличается от них) и

изометрические (все три показателя искажения одинаковы).

Это деление аксонометрических проекций по признаку соотношения между показателями искажения совершенно не зависит от ранее установленного деления тех же проекций по признаку угла между направлением проектирования и плоскостью проекций.

Следовательно, как прямоугольная, так и косоугольная проекции могут быть либо триметрической, либо диметрической, либо, наконец, изометрической.

*) Для удобства мы обозначаем иногда сами точки в пространстве буквами **жирного** шрифта (O , C , M и т. д.), а их аксонометрические проекции—теми же буквами светлого курсивного шрифта (O , C , M и т. д.).

§ 109. Формулы прямоугольной аксонометрии

Пусть MO —направление аксонометрического проектирования (рис. 333); обозначим координаты произвольной точки M , находящейся на проходящем через начало координат проектирующем луче, через x , y и z . Опустим (в пространстве) из точки C , лежащей на оси OZ , перпендикуляр CK на прямую MO . В таком случае проекцией отрезка OC на плоскость P аксонометрических проекций (перпендикулярную MO) будет отрезок OC , равный отрезку KC (так как KC перпендикулярно MO , т. е. параллельно плоскости P). В таком случае показатель искажения r по направлению оси OZ равен

$$r = \frac{CK}{OC}.$$

Из подобия треугольников OKC и OCM следует, что

$$\frac{CK}{OC} = \frac{CM}{OM},$$

но

$$CM = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Совершенно аналогично получаем:

$$p = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad q = \frac{\sqrt{z^2 + x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда вытекает важная формула:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2, \quad (1)$$

т. е. в прямоугольной аксонометрии сумма квадратов показателей искажения равна 2.

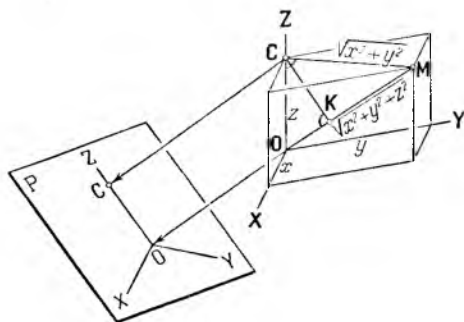


Рис. 333. К выводу формулы $p^2 + q^2 + r^2 = 2$.

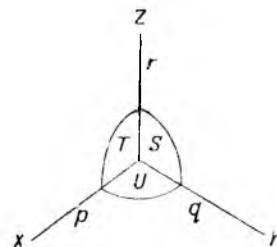


Рис. 334. Углы между аксонометрическими осями.

В прямоугольной аксонометрии существуют следующие соотношения между углами S , T , U , образуемыми аксонометрическими осями (рис. 334), и показателями искажения:

$$\sin S = \frac{\sqrt{1-p^2}}{qr}, \quad (2a)$$

$$\sin T = \frac{\sqrt{1-q^2}}{rp}, \quad (2b)$$

$$\sin U = \frac{\sqrt{1-r^2}}{pq}. \quad (2c)$$

Мы этих формул выводить здесь не будем. Разумеется,

$$S + T + U = 360^\circ *).$$

Между шестью величинами p , q , r , S , T и U существуют только четыре независимых соотношения. Следовательно, любые две из них могут быть выбраны произвольно **), а остальные четыре определяются при помощи соотношений (1), (2a), (2b) и (2c) ***).

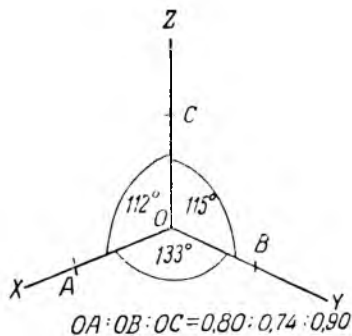


Рис. 335. $p=0,80$; $q=0,74$; $r=0,90$;
 $S=115^\circ$; $T=112^\circ$; $U=133^\circ$.

Пример. Пусть заданы два показателя искажения (рис. 335):

$$p=0,80; \quad r=0,90.$$

Тогда

$$q^2 = 2 - p^2 - r^2 = 2 - 0,64 - 0,81 = 0,55, \quad q = \sqrt{0,55} \approx 0,74;$$

$$\sin S = \frac{\sqrt{1-p^2}}{qr} = \frac{\sqrt{0,36}}{0,74 \cdot 0,90} = 0,90, \quad S = 115^\circ;$$

$$\sin T = \frac{\sqrt{1-q^2}}{rp} = \frac{\sqrt{0,45}}{0,90 \cdot 0,80} = 0,93, \quad T = 112^\circ;$$

$$\sin U = \frac{\sqrt{1-r^2}}{pq} = \frac{\sqrt{0,19}}{0,80 \cdot 0,74} = 0,735, \quad U = 133^\circ.$$

Проверка:

$$S + T + U = 360^\circ.$$

*) Эта формула, совершенно ясная из рис. 334, может быть также выведена алгебраически из формул (1) и (2) и поэтому не является независимой; величины p , q , r , S , T , U связаны между собой четырьмя независимыми формулами: (1), (2a), (2b) и (2c).

**) Со следующими ограничениями: углы S , T и U могут быть только тупыми; показатели искажения p , q и r могут быть не более единицы.

***) Из приведённых выше формул легко получить следующие зависимости:

$$p^2 = \frac{\cos S}{\sin T \sin U}, \quad (3a)$$

$$q^2 = \frac{\cos T}{\sin U \sin S}, \quad (3b)$$

$$r^2 = \frac{\cos U}{\sin S \sin T}. \quad (3c)$$

Эти формулы позволяют определить значения показателей искажения по углам между аксонометрическими осями.

Наконец, иногда удобно воспользоваться следующим простым соотношением:

$$p^2 : q^2 : r^2 = \sin 2S : \sin 2T : \sin 2U. \quad (4)$$

§ 110. Аксонометрические сетки

При построении ортогональных проекций, которыми мы пользовались в первой части этой книги, удобно применять бумагу с квадратной координатной сеткой, т. е. разграфлённую на квадраты (например, клетчатую или миллиметровую бумагу, рис. 336).

Несколько иная координатная сетка оказывается очень полезной и при построении аксонометрических проекций.

На чертеже, на котором нанесены аксонометрические оси с делениями (рис. 337, а), проведём через границы делений прямые, параллельные соответствующим осям (рис. 337, б). Мы получим аксонометрические проекции координатных сеток всех трёх плоскостей проекций (H , V и W); квадраты координатных сеток превратились в аксонометрии в параллелограммы, отношения длин сторон которых равны отношениям соответствующих показателей искажения.

Теперь нетрудно по точкам «преобразовать» каждую из ортогональных проекций тела (рис. 336) в соответствующую проекцию на аксонометрическом чертеже (рис. 337, в). Для этого нужно найти расстояния каждой точки от плоскостей проекций W , V и H и отложить соответствующие отрезки на построенной сетке.

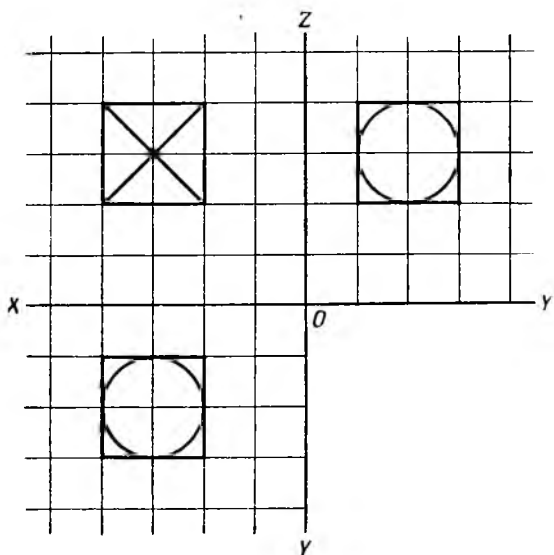


Рис. 336. Квадратная сетка для построения ортогональных проекций.

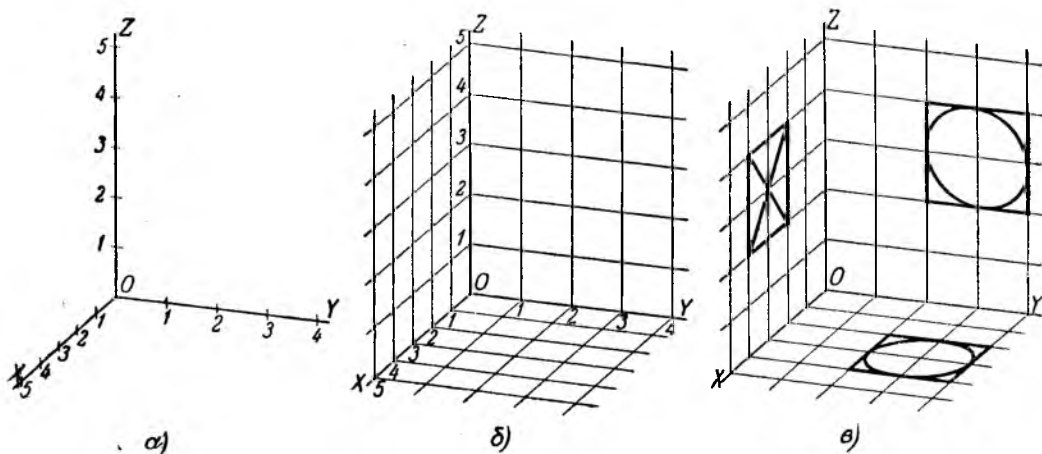


Рис. 337. а) Аксонометрические оси. б) Аксонометрические сетки. в) Вторичные проекции.

Аксонометрические проекции проекций фигуры на плоскости H , V и W называются *вторичными проекциями*. Они изображены на рис. 337, в.

По вторичным проекциям легко построить аксонометрическую проекцию тела.

В самом деле, любая точка A пространства находится на пересечении трёх перпендикуляров, восстановленных из её ортогональных проекций перпендикулярно к соответствующим плоскостям проекций. Так как направления этих перпендикуляров параллельны соответствующим осям координат, то положение точки в пространстве находим, проведя через её проекции a , a' , a'' прямые линии, параллельные соответственно осям OZ , OY и OX . Эту же операцию нетрудно произвести и на аксонометрическом чертеже; например (рис. 338), для нахождения аксонометрической проекции точки A проводим на чертеже $aA \parallel OZ$, $a'A \parallel OY$ и $a''A \parallel OX$. Все три прямые пересеклись в одной точке—точке A , что указывает на точность построений *).

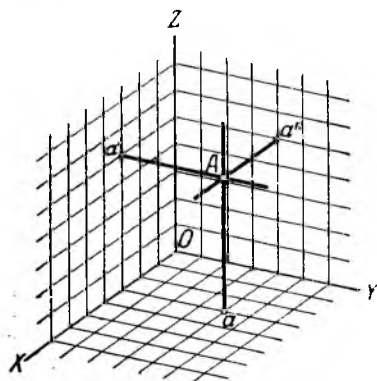


Рис. 338. Построение аксонометрической проекции точки по её вторичным проекциям.

Для получения аксонометрической проекции тела по его вторичным проекциям мы строим аксонометрические проекции его характерных точек и соединяем их (прямыми линиями при помощи линейки или кривыми—при помощи лекал). Это сделано на рис. 339, полученном из рисунка 337, в.

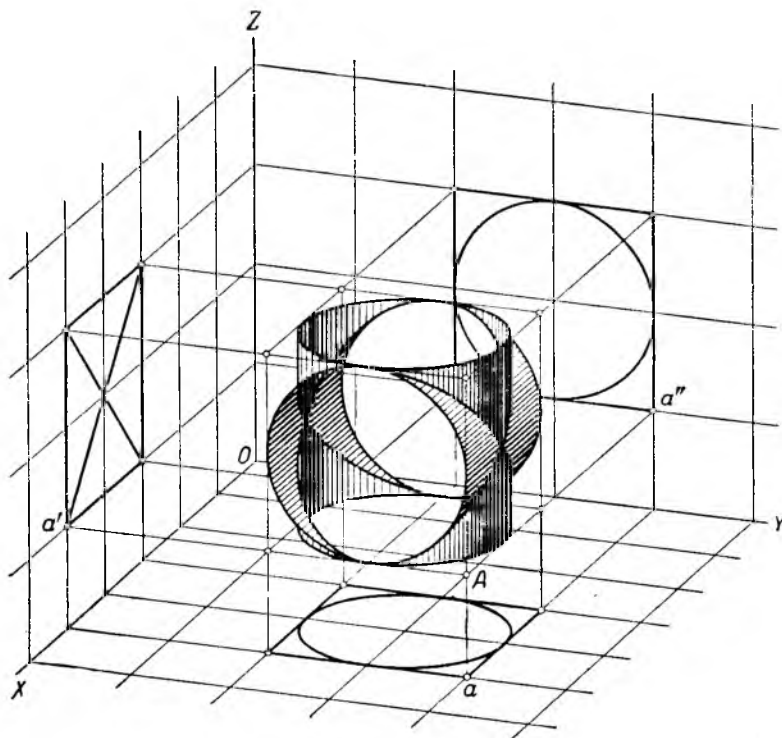


Рис. 339. Построение аксонометрической проекции тела по его вторичным проекциям.

*) Для нахождения точки A , очевидно, достаточно провести не три, а всего лишь две прямые, притом любые две из трёх, подобно тому как мы в своё время находили оригинал по любым двум проекциям; однако в целях контроля рекомендуется для основных точек фигуры проводить все три проектирующих луча.

Изображение тела получилось столь наглядным, что вторичные проекции перестали быть необходимыми (рис. 340).

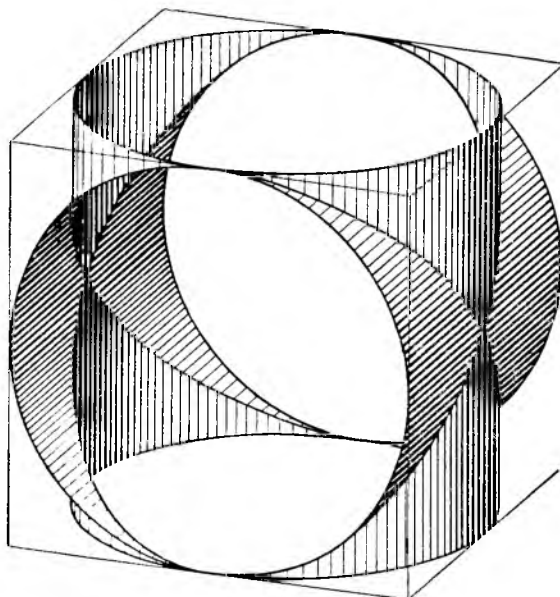


Рис. 340. Аксинометрическая проекция тела без вторичных проекций.

У п р а ж н е н и е. На рис. 341 даны ортогональные проекции восьми пространственных линий. Постройте их аксинометрические проекции (предварительно нужно построить вторичные проекции).

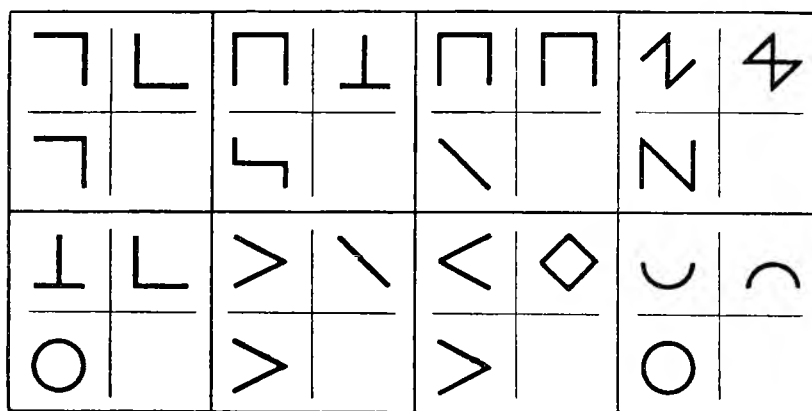


Рис. 341. По этим ортогональным проекциям восьми пространственных линий построить их аксинометрические проекции.

Мы уже знаем, что одна проекция тела (без дополнительных условий) не может дать исчерпывающего представления об оригинале.

Пусть, например, даны:

- 1) аксинометрические оси и
- 2) отрезок AB —аксинометрическая проекция некоторого оригинала (рис. 342).

Сам оригинал может быть: отрезком различной длины (рис. 343, *a*, *б*), плоской ломаной (рис. 343, *в*), плоской кривой линией (рис. 343, *г*), плоской фигурой той или иной формы (рис. 343, *д*, *е*).

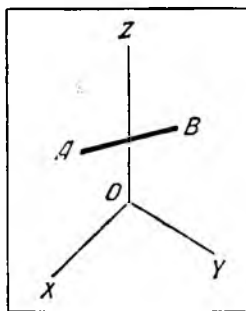


Рис. 342. Одна аксонометрическая проекция не определяет вполне оригинала.

Если же на чертеже задана кроме аксонометрической проекции ещё хотя бы одна вторичная проекция, то оригинал вполне определяется.

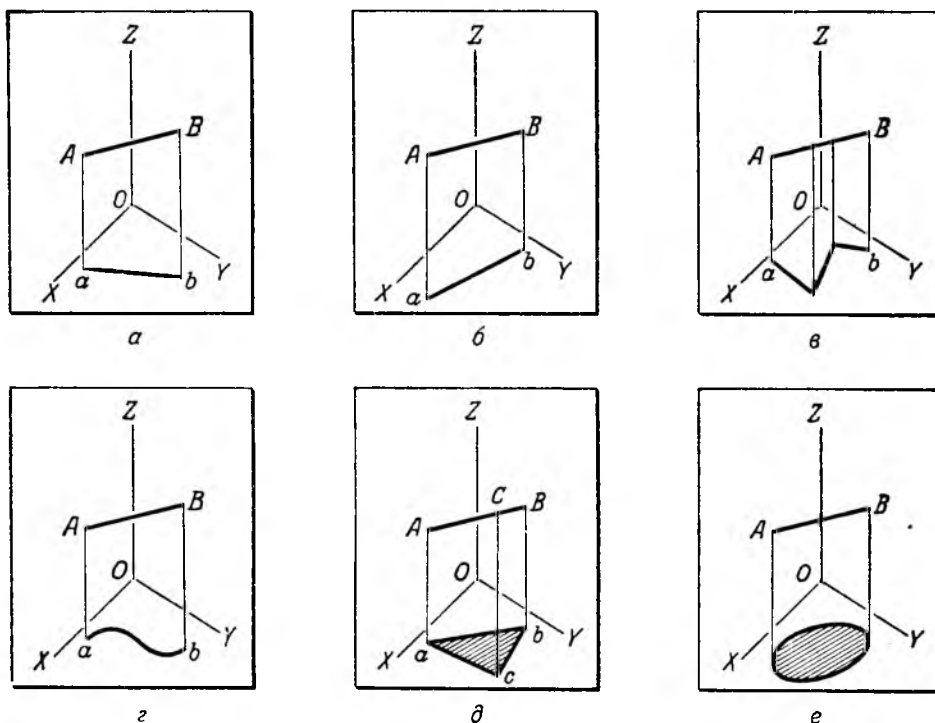


Рис. 343. Аксонометрическая и одна из вторичных проекций вполне определяют оригинал.

Иногда для полного представления о предмете достаточно ограничиться его аксонометрической проекцией, а вместо вторичной проекции иметь некоторые дополнительные данные о предмете (см., например, нижеследующее упражнение).

У п р а ж н е н и е. Постройте вторичные проекции отрезка AB (рис. 342), если известно, что он параллелен плоскости H , а его конец A лежит в плоскости V .

То же, если отрезок AB попрежнему параллелен плоскости H , а его конец B лежит в плоскости W .

§ 111. Прямоугольные диметрические проекции

Возвратимся к рис. 327 на стр. 170. Мы получили несколько новых изображений куба методом перемены плоскостей проекций. Как известно, мы можем получить новые проекции также и методом вращения. На рис. 344 изображён куб, грани которого параллельны плоскостям проекций. Будем вращать этот куб вокруг диагонали $1-3$ его передней грани. Как будут перемещаться при этом вершины куба?

Две вершины, 1 и 3 , останутся на месте, а остальные шесть вершин будут перемещаться по окружностям, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения $1-3$.

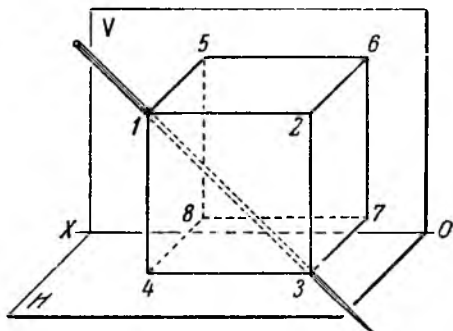


Рис. 344. Вращение куба вокруг диагонали $1-3$ его грани $1-2-3-4$.

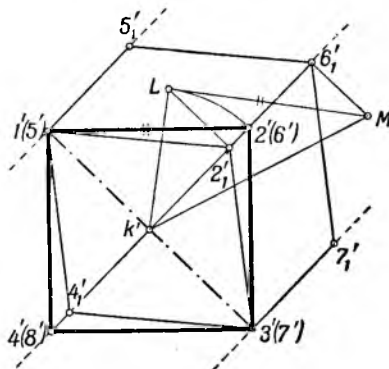


Рис. 345. Построение вертикальной проекции куба после его вращения вокруг прямой $1-3$.

На рис. 345 изображена проекция ($1'-2'-3'-4'-5'-6'-7'-8'$) этого куба на плоскость V до его вращения. Эта проекция имеет вид квадрата.

Так как прямая $1-3$ параллельна плоскости V , то плоскости, перпендикулярные к $1-3$, перпендикулярны к плоскости V ; следовательно, дуги, по которым движутся вершины $2, 4, 5, 6, 7$ и 8 куба, спроектируются на плоскость V в виде прямых линий, перпендикулярных к прямой $1'-3'$. Проведём через точки $2'$ ($6'$), $4'$ ($8'$), ($5'$) и ($7'$) прямые, перпендикулярные $1'-3'$). При вращении куба проекции его вершин будут перемещаться по этим прямым.

Остановим вращение куба в тот момент, когда вершина 4 спроектируется, скажем, в точку $4'_1$. Так как параллельная проекция квадрата $1-2-3-4$ всегда параллелограмм, то новую проекцию $2'_1$ вершины 2 куба мы находим, проведя $3'-2'_1 \parallel 4'_1-1'$ и $1'-2'_1 \parallel 4'_1-3'$.

$1'-2'_1-3'-4'_1$ —новая проекция грани $1-2-3-4$ куба. Эта фигура—ромб (почему?). Следовательно, новые проекции $1'-2'_1, 2'_1-3', 3'-4'_1, 4'_1-1'$ всех четырёх рёбер куба, ограничивающих грань $1-2-3-4$ куба,—равные отрезки.

Итак, при вращении куба вокруг диагонали его грани, параллельной плоскости проекций, рёбра двух направлений получаются с одинаковым искажением. Таким способом мы получим *прямоугольную диметрическую проекцию* куба, если построим проекции остальных четырёх его вершин.

Найдём новую проекцию вершины 6 ; для этого рассуждаем так. Рассмотрим прямоугольный треугольник $K-2-6$ (точка K —центр грани $1-2-3-4$ куба). Один его катет равен $K-2$ (или, что то же самое, равен $k'-2'$), а другой равен ребру куба. Проводим $2'_1-L \perp 2'_1 k'$ и засекаем

*) Заметим, что прямые, проведённые через точку $2'$ ($6'$) и через точку $4'$ ($8'$), слились в одну прямую (почему?).

**) Проверкою точности построений является пересечение обеих прямых $1'-2'_1$ и $3'-2'_1$ с прямой $4'-2'$ в одной точке $2'_1$.

из точки k' радиусом $k'-2'$ точку L . Проводим $LM \perp Lk'$ и откладываем отрезок LM , равный ребру куба. Полученный треугольник $k'LM$ — неискажённое изображение треугольника $K-2-6$. Но при вращении куба вокруг прямой $1-3$ проекция отрезка $K-2$ оказалась равной $k'-2'_1$. Опустив из точки M перпендикуляр на прямую $k'-6'$, получим точку $6'_1$ — новую проекцию вершины 6 куба.

Проекции остальных вершин построить теперь нетрудно.

На рис. 346 показано несколько положений куба, вращающегося вокруг оси $1-3$ (мы пользуемся здесь обозначениями рис. 345): в верхнем ряду дано построение проекций указанным способом, а в нижнем эти же проекции повернуты так, что четыре ребра куба занимают вертикальное положение (это обычно принято в аксонометрических проекциях).

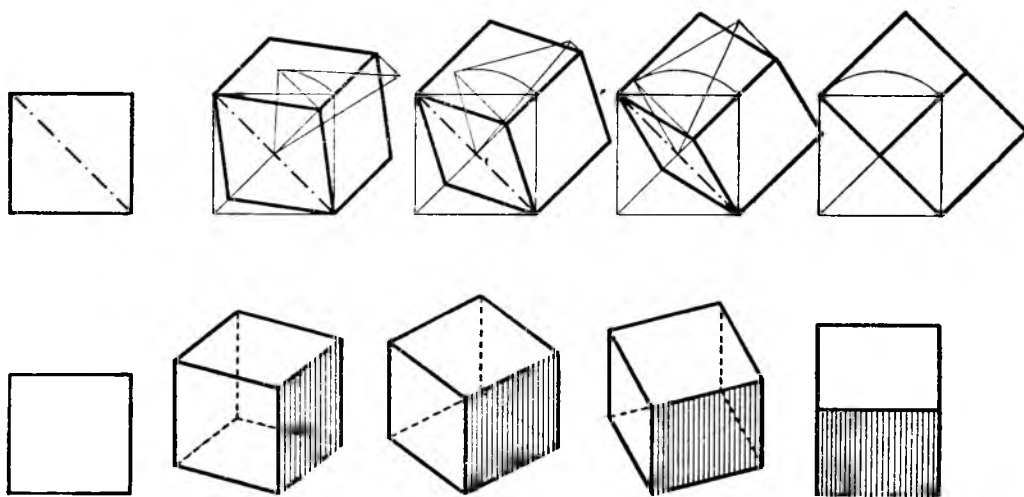


Рис. 346. Различные положения куба, вращающегося вокруг диагонали грани

Направим аксонометрические оси параллельно проекциям трёх рёбер куба в одном из его положений на рис. 346 (нижний ряд). Тогда отношения длин этих проекций к истинной величине ребра дадут показатели искажения по осям.

Как изменялись показатели искажения по направлениям рёбер $1-2$ и $2-3$ куба при его вращении вокруг оси $1-3$ (рис. 346)?

На каждой проекции они были равны друг другу.

В начальном положении (левый рис. 346) оба показателя искажения были равны единице.

В конечном положении (правый рис. 346) проекция каждого из этих рёбер стала равной половине длины диагонали грани, т. е. $\frac{\sqrt{2}}{2} a$.

Итак, в прямоугольной диметрической проекции наибольшее значение показателя искажения (по двум направлениям с равным искажением) равно 1,0, а наименьшее равно

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707.$$

Выясним, как изменяется третий показатель искажения, не равный первым двум.

Как видно из рис. 346, в начальном положении он равен нулю, а в конечном — единице.

Таким образом, сначала он был меньше каждого из остальных двух показателей искажения, а в конце он стал больше каждого из них. Если учесть, что при вращении куба все показатели искажения изменялись непрерывно, т. е. принимали все промежуточные значения, то ясно, что было такое положение, когда все три показателя искажения были равны между собой. Это было в тот момент, когда одна из диагоналей куба оказалась перпендикулярной к плоскости проекций, т. е. её проекция была точкой.

Этот случай имеет особое значение, и мы специально рассмотрим его в следующем параграфе.

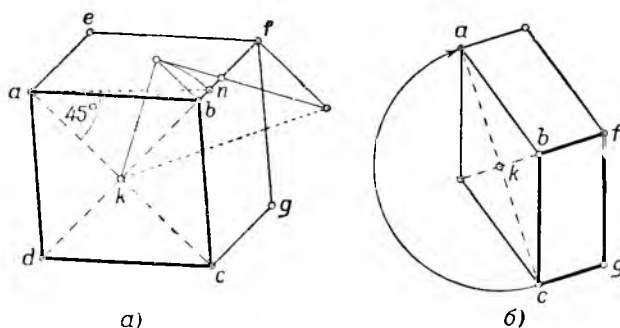


Рис. 347. Построение прямоугольной диметрической проекции куба.

Так как любой ромб мы можем рассматривать как прямоугольную диметрическую проекцию некоторого квадрата—грани куба, то, желая построить прямоугольную диметрическую проекцию куба, мы вправе начертить произвольный ромб $abcd$ (рис. 347, а) и назвать его проекцией грани $ABCD$ квадрата. Большая диагональ ромба—это неискажённая диагональ квадрата; поэтому, проведя an под углом 45° к ac , мы получим an —истинную величину стороны квадрата.

Направление проекций ae , bf , cg , ...ребёр куба известно: это—направление малой диагонали ромба; точку f находим известным уже нам способом.

Если нам дана диметрическая проекция $bcgf$ (рис. 347, б) той грани куба, ребра которой испытали различные искажения (т. е. произвольный параллелограм), то достроить проекцию куба совсем просто. Продолжаем fb и проводим $ca \perp fb$. Откладываем $ka = kc$, откуда $ba = bc$ (свойство ромба!); получаем точку a . Остальное понятно из чертежа.

У п р а ж н е н и е. Достройте прямоугольную диметрическую проекцию куба по данной проекции одной из его граней (рис. 348).



Рис. 348. Достройте прямоугольную диметрическую проекцию куба.

§ 112. Прямоугольная изометрическая проекция

Рассмотрим подробнее случай, когда все три показателя искажения одинаковы ($p = q = r$).

Известно, что диагональ куба образует равные углы со всеми тремя рёбрами куба, сходящимися с ней в одной вершине. Поэтому в том случае, когда, например, диагональ $1-7$ куба (рис. 349) будет перпендикулярна к плоскости проекций (в данном случае плоскости H), все три ребра куба ($7-6$, $7-3$ и $7-8$), сходящиеся в одной вершине 7 с этой диагональю $7-1$, окажутся одина-

ково наклонёнными к плоскости проекций и, следовательно, спроектируются на неё с одинаковым искажением. При этом положении куба получится прямоугольная изометрическая проекция; ни при каком другом положении куба изометрической проекции получиться не может.

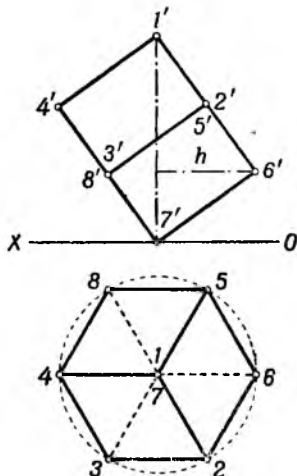


Рис. 349. Получение прямоугольной изометрической проекции куба.

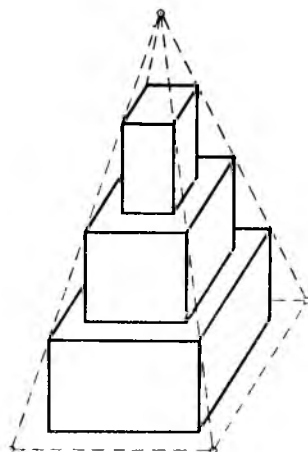


Рис. 350. Изобразите это тело в прямоугольной изометрической проекции.

Найдём величину проекции ребра куба на плоскость, перпендикулярную к его диагонали. Она равна высоте прямоугольного треугольника $I'-6'-7'$, катетами которого служат ребро куба и диагональ грани куба. Обозначив длину ребра куба через a , получаем, что катеты равны, соответственно, a и $a\sqrt{2}$; следовательно, площадь треугольника $I'-6'-7'$ равна

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2}.$$

С другой стороны,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} h,$$

откуда

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} a.$$

Таким образом,

$$p = q = r = \frac{h}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8165,$$

т. е. в прямоугольной изометрической проекции все показатели искажения равны

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82.$$

Поскольку на изометрической проекции все 12 рёбер куба изображаются равными отрезками, фигура, ими образованная, является правильным шестиугольником с тремя диагоналями.

АксонOMETРИЧЕСКИЕ ОСИ образуют в этом случае друг с другом углы по 120° .

У п р а ж н е н и е. Постройте прямоугольную изометрическую проекцию ступенчатого тела, изображённого на рис. 350. Пирамида правильная; её высота вдвое больше стороны основания; высота каждого параллелепипеда равна $1/4$ высоты пирамиды.

§ 113. Подобно увеличенные аксонометрические проекции

При построении аксонометрических проекций часто задают не сами значения показателей искажения, а их отношения.

Пусть, например, мы хотим построить такую прямоугольную аксонометрическую проекцию, чтобы отношения показателей искажения были следующими:

$$p : q : r = 6 : 7 : 8.$$

Из этих отношений и из уравнения $p^2 + q^2 + r^2 = 2$ (стр. 175) нетрудно определить величину каждого из трёх показателей искажения, а именно:

$$p = 0,70; q = 0,81; r = 0,93.$$

Из формул (2) на стр. 175 можно найти углы между аксонометрическими осями:

$$\angle ZOY = 107^\circ, \angle ZOX = 115^\circ$$

и

$$\angle XOY = 138^\circ.$$

Теперь мы располагаем всеми данными, необходимыми для построения аксонометрической проекции выбранного типа; надо провести аксонометрические оси под найденными углами и нанести на этих осях масштабы в соответствии с вычисленными тремя показателями искажения (рис. 351).

Но можно несколько упростить работу по нанесению масштабов. Для этого наибольший показатель искажения (в нашем примере показатель искажения r по направлению оси OZ) принимают равным единице и, сохраняя заданные отношения, соответственно увеличивают остальные два показателя (в нашем примере следует принять $p = \frac{6}{8}$ и $q = \frac{7}{8}$); в таком случае мы получим на аксонометрическом чертеже изображение данного предмета не в истинную величину, а подобно увеличенное (в нашем примере в отношении $1 : 0,93 \approx 1,08$). Теперь процесс построения и измерения вдоль одной из осей упростился, так как по этому направлению сохраняются натуральные размеры оригинала.

Применяя этот приём одновременного пропорционального увеличения масштабов по всем трём осям к диметрическим проекциям, мы получаем подобно увеличенные изображения предмета, причём по двум направлениям сохраняются натуральные масштабы.

Особенно выгодно одновременное пропорциональное увеличение масштабов для изометрической проекции, так как в этом случае все три показателя искажения (вместо $p = q = r \approx 0,82$) становятся равными единице. Таким образом, изображение оказывается увеличенным в $1 : 0,82 \approx 1,22$ раза.

При необходимости можно одновременно пропорционально уменьшить масштабы по всем трём осям.

Конечно, при пропорциональном изменении масштабов все углы, в том числе и углы между аксонометрическими осями, остаются без изменений.

На рис. 352 изображены для примера триметрические, диметрические и изометрические прямоугольные проекции куба—как истинные, так и увеличенные.

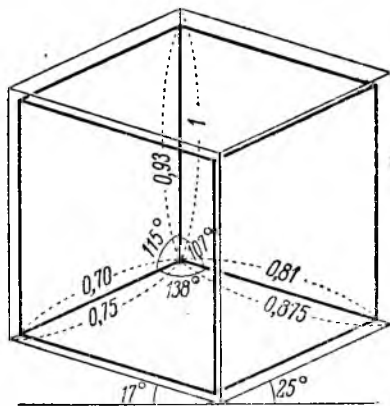


Рис. 351. Подобно увеличенная проекция куба.

§ 114. Основное предложение аксонометрии

Возьмём куб, ребро которого равно единице (рис. 353, а), пометим одну из его вершин буквой O и проведём через три ближайшие к точке O вершины A , B и C куба секущую плоскость ABC . $OABC$ —треугольная пирамида (рис. 353, б); её основание ABC —равносторонний треугольник; все три плоских угла при вершине O —прямые; все три ребра, сходящиеся в точке O , равны единице.

Треугольную пирамиду называют *тетраэдром* *).

Треугольную пирамиду, образованную описанным способом, называют *масштабным тетраэдром*.

Если мы примем за единицу длины какую-либо другую величину, то получим другой масштабный тетраэдр, подобный первому.

Так как масштабный тетраэдр вполне определяет куб, из которого он образован, и в то же время проще куба, то удобно оперировать именно с ним.

Рассмотрим теперь другую фигуру. Соединим четыре точки o , a , b и c , лежащие в одной плоскости (но не лежащие на одной прямой), друг с другом (рис. 354).

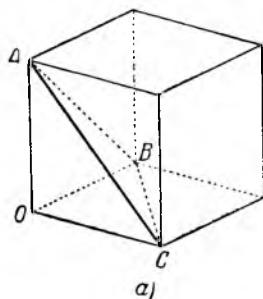


Рис. 353. Масштабный тетраэдр.

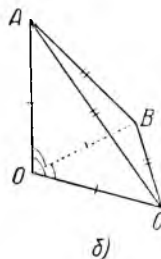


Рис. 354. Полные четырёхугольники.

Полученная фигура из шести отрезков называется *полным четырёхугольником*. Эта фигура представляет собой плоский четырёхугольник (выпуклый или невыпуклый) с обеими диагоналями. На рисунке изображены два варианта полного четырёхугольника.

Между масштабным тетраэдром, с одной стороны, и любым полным четырёхугольником, с другой стороны, существует следующая очень важная связь, являющаяся основным предложением аксонометрии и **):

Любой полный четырёхугольник можно рассматривать как параллельную проекцию масштабного тетраэдра, подобного данному.

Иная формулировка этого предложения: *существует полный четырёхугольник, подобный любому данному, являющийся параллельной проекцией данного масштабного тетраэдра.*

Отсюда вытекает, что *любые три отрезка на плоскости, исходящие из одной точки* (лишь бы только все три не располагались на одной прямой), *можно принять за параллельную проекцию трёх рёбер некоего куба, исходящих из одной его вершины.*

*) От греческих слов «tetra»—четыре и «hedra»—основание, поверхность, сторона; тетраэдр имеет четыре грани.

**) Доказательство этого предложения можно найти в следующих книгах; Н. Ф. Четверухин, Введение в высшую геометрию, изд. 3, 1937, стр. 34—46; Н. А. Глаголев, Начертательная геометрия, изд. 2, 1946, стр. 110—111; Н. А. Попов, Курс начертательной геометрии, 1947, стр. 367—369.

Таким образом, косоугольные проекции куба могут оказаться самой неожиданной формы (рис. 355).

Вот почему мы имеем право в косоугольной аксонометрии выбирать совершенно произвольно как направления аксонометрических

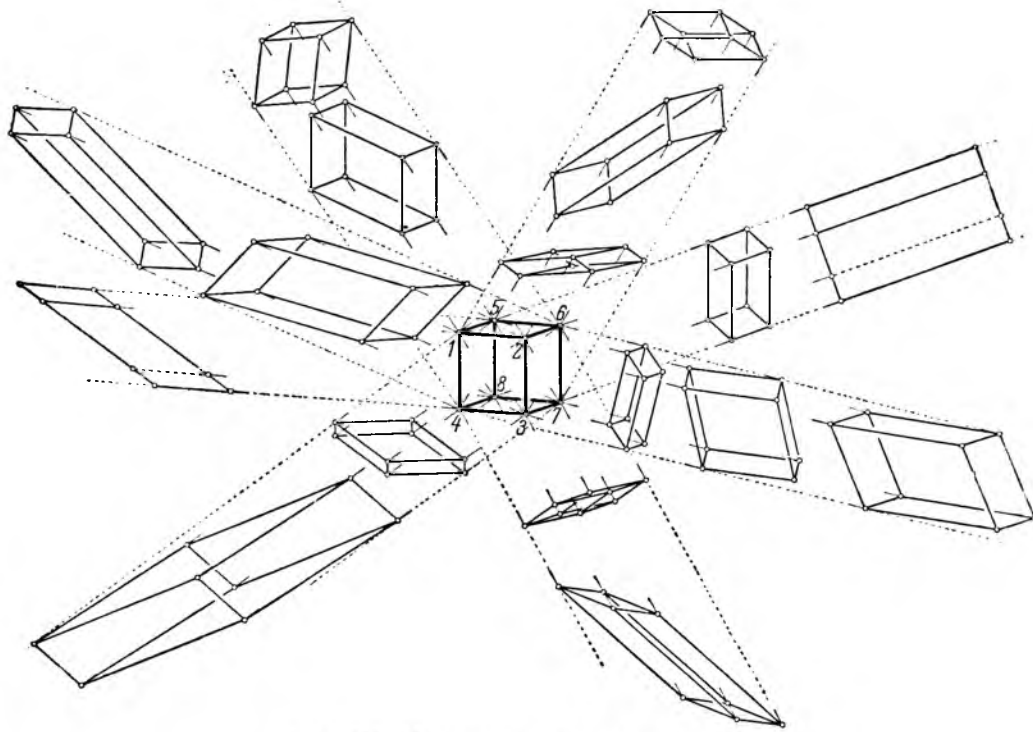


Рис. 355. Косоугольные проекции куба.

осей, так и масштабы (показатели искажения) по направлениям осей. Построив затем изображение, мы получим подобно изменённую проекцию оригинала, т. е. изображение оригинала в некотором масштабе.

§ 115. Косоугольные аксонометрические проекции

В §§ 109—113 мы изучали прямоугольные аксонометрические проекции, т. е. такие, которые получаются путём прямоугольного проектирования тела и координатных осей на плоскость аксонометрических проекций.

В том случае, когда направление проектирования не перпендикулярно плоскости аксонометрических проекций, получаются, как мы знаем, *косоугольные аксонометрические проекции*.

При косоугольном проектировании типы проекций гораздо более разнообразны, чем при прямоугольном. Это видно на рис. 355. В то время как в прямоугольных аксонометрических проекциях выбор любых двух величин из шести: p , q , r , S , T , U (например, двух показателей искажения p и r либо двух углов— S и T —см. § 109) полностью определял и все остальные величины, в косоугольной проекции оказывается возможным произвольно выбрать из шести тех же величин—четыре. Например, можно задать три показателя искажения*) и один угол между аксонометрическими осями,

*) При косоугольном проектировании отношение длины проекции отрезка к длине проектируемого отрезка может принимать любые значения, т. е. показатели искажения могут быть любой величины.

либо можно произвольно выбрать два отношения трёх показателей искажения и два угла между аксонометрическими осями, после чего можно (графически или аналитически) найти остальные две величины, а затем и построить проекцию.

Однако формулы, связывающие значения этих шести величин, оказываются для косоугольных проекций много сложнее, чем формулы для прямоугольных проекций.

Поэтому на практике значительно упрощают задачу и задают не четыре, а пять из шести величин; а так как сумма трёх углов между аксонометрическими осями равна 360° , то таким образом все шесть величин (p , q , r , S , T и U) оказываются известными.

В силу основного предложения аксонометрии, произвольно выбрав пять величин и построив косоугольную проекцию тела, мы получим изображение тела не в истинную величину, а подобно изменённое (уменьшённое или увеличенное). Подобное изменение изображения в прямоугольных проекциях нам известно (§ 113).

Итак, выбрав любые показатели искажения и любые углы между аксонометрическими осями, мы можем построить косоугольную проекцию тела, подобного данному.

Именно с точки зрения большей свободы выбора величин показателей искажения и углов между осями проекций косоугольные проекции имеют некоторые преимущества перед прямоугольными.

Перейдём к рассмотрению некоторых наиболее распространённых видов косоугольных аксонометрических проекций.

Наибольшее распространение имеют такие косоугольные проекции, у которых *плоскость проекций параллельна одной из плоскостей H , V или W* . В этом случае фигуры, параллельные плоскости проекций, проектируются без искажения.

Такие косоугольные аксонометрические проекции будут содержать неискажённые отрезки по направлениям двух осей, т. е. будут *ди мет р и ч е с к и м и*. Можно выбрать такое направление проектирования, чтобы все три коэффициента искажения были одинаковыми; в этом случае проекция будет *косоугольной изометрической*.

Начнём с рассмотрения случая, когда плоскость аксонометрических проекций параллельна плоскости V ($p=r=1$, q произвольно). Такие косоугольные аксонометрические проекции называются *фронтальными или кавальерными* *).

На рис. 356 изображено девять примеров фронтальных проекций куба; показатель искажения q (по оси OY) принят равным $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и 1; каждый из этих случаев рассмотрен в трёх вариантах: угол между продолжением оси OX и осью OY равен 30° , 45° и 60° .

Три фронтальные проекции в правом столбце рис. 356—изометрические.

Фронтальная проекция при показателе искажения по оси OY , равном $\frac{1}{2}$, и при направлении этой оси по биссектрисе прямого угла между осями OX и OZ применяется очень часто. Эта проекция называется *кабинетной*. Она изображена в центре рис. 356.

Рассмотрим теперь случай, когда плоскость проекций P параллельна плоскости H (рис. 357, а).

При таком расположении плоскости P прямой угол XOY , а также и все отрезки, лежащие в плоскости XOY , будут проектироваться на плоскость P без искажения.

*) По имени знаменитого итальянского математика первой половины XVII века Бонавентура Кавальери.

Искажение по направлению оси OZ выражается отношением $OZ:OZ_1$. На рис. 357, б показан куб в косоугольной диметрической проекции с показателями искажения $p=1$, $q=1$, $r=\frac{1}{2}$.

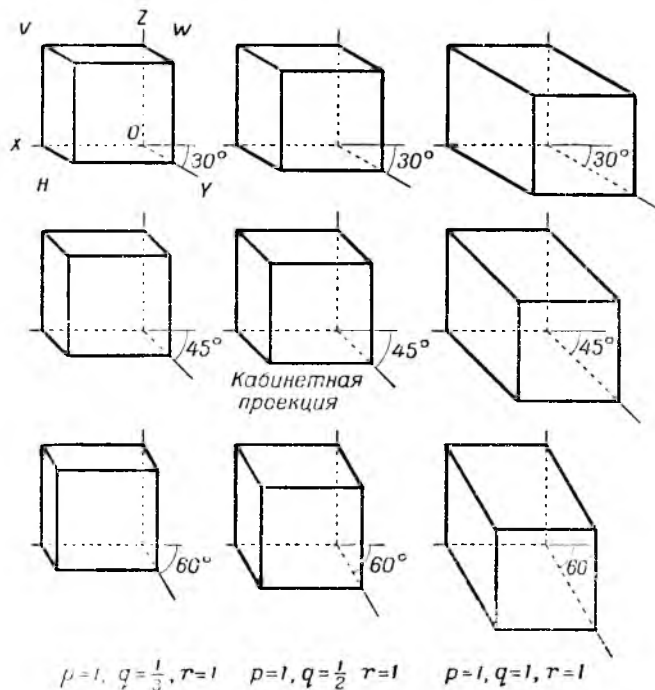


Рис. 356. Косоугольные фронтальные изображения куба. В центре—кабинетная проекция.

Если искажение по направлению оси OZ тоже равно единице, то полученная косоугольная изометрическая проекция называется «военной перспек-

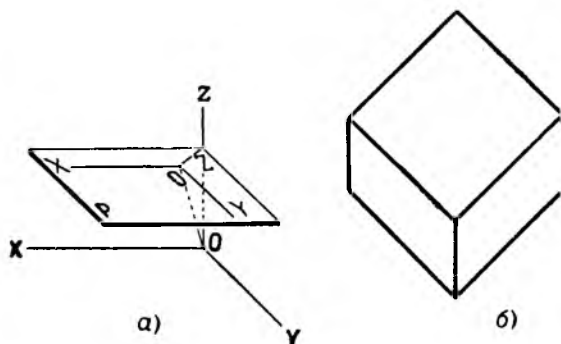


Рис. 357. Косоугольная аксонометрическая проекция, когда плоскость проекции параллельна плоскости H .

тивной»). Она получила широкое распространение для изображения различных сооружений, рассматриваемых сверху, благодаря простоте построения и наглядности получаемого изображения. На рис. 358 дано изображение

*) Термин «перспектива» здесь применяется неправильно. По существу, военная перспектива не является перспективой в истинном значении этого слова. С перспективой мы познакомимся позже.

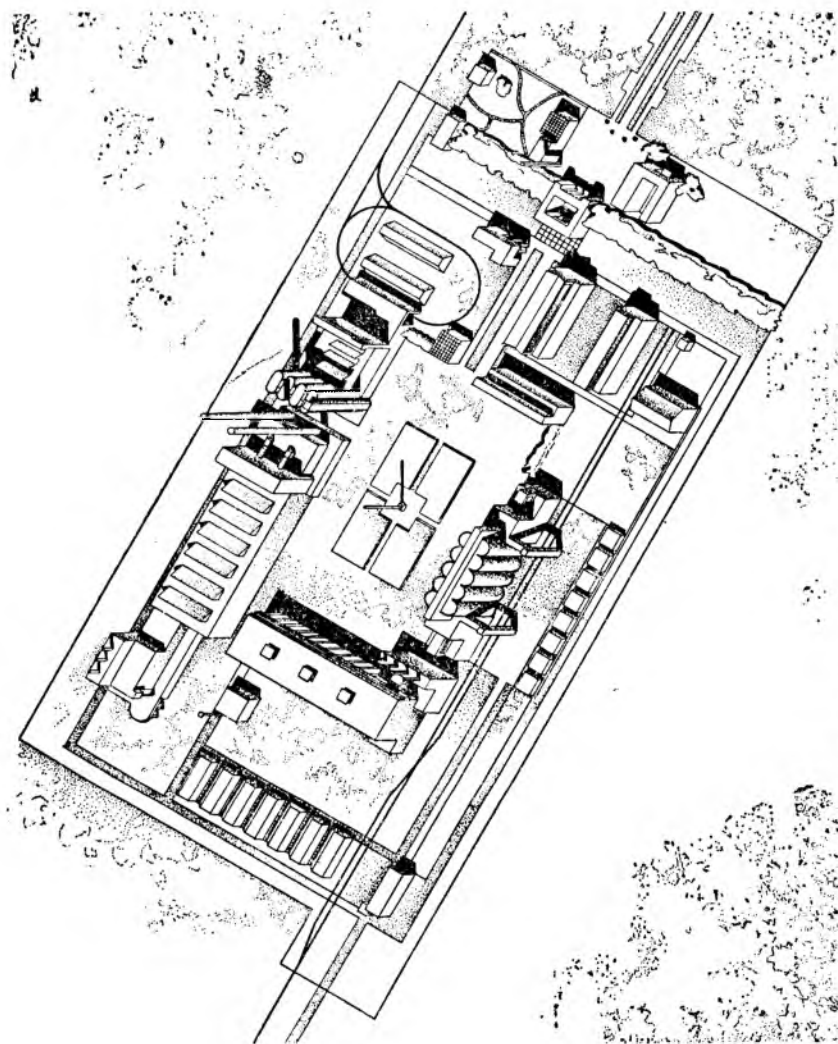


Рис. 358. Военная перспектива завода

завода в военной перспективе. Построение произведено следующим образом. Начерчен план завода (в некотором масштабе); его ориентировка на чертеже может быть выбрана произвольно. Через характерные точки плана проведены вертикальные прямые; на вертикалях отложены соответственные длины — в том же масштабе, что и план.

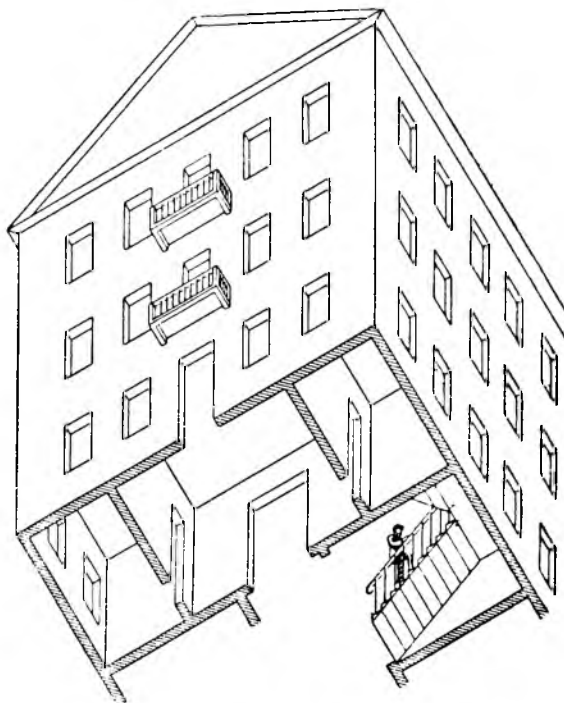


Рис. 359. Лягушачья проекция дома.

Такая же косоугольная изометрическая проекция, но являющаяся видом «с низу», называется «лягушачьей». На рис. 359 изображено здание в лягушачьей проекции.

§ 116. Применение различных видов аксонометрических проекций

Итак, аксонометрическая проекция, в зависимости от величины угла σ между направлением проектирования и плоскостью проекций, может быть либо прямоугольной ($\sigma = 90^\circ$), либо одной из множества косоугольных проекций ($0 < \sigma < 90^\circ$).

С другой стороны, аксонометрическая проекция, в зависимости от соотношений между показателями искажений по направлениям осей, может быть либо изометрической (все три показателя искажения равны между собой), либо одной из множества диметрических (два показателя искажения из трёх одинаковы), либо, наконец, одной из множества триметрических (все три показателя искажения — разные).

Таким образом, вид аксонометрической проекции определяется углом σ и соотношением между тремя показателями искажения.

Возникает вопрос: какую же из бесконечного множества видов аксонометрических проекций выбирать в каждом отдельном случае?

С ортогональными проекциями дело обстоит значительно проще: как было отмечено, большинство предметов содержит главные прямые и плоскости, параллельные рёбрам и граням куба; поэтому над ориента-

цией предмета относительно трёх взаимно перпендикулярных плоскостей особенно долго задумываться не приходилось.

Что же касается выбора вида аксонометрической проекции, то он зависит от особенностей изображаемого предмета и от требований, предъявляемых к изображению. Опыт самостоятельного построения нескольких аксонометрических проекций даст читателю больше, чем готовые рецепты: поэтому ниже приведены лишь некоторые общие соображения.

Прямоугольная или косоугольная проекция?

Наш глаз мысленно проектирует предметы на плоскость, перпендикулярную к лучу зрения; поэтому прямоугольные проекции выглядят естественнее, чем косоугольные; особенно несуразны косоугольные проекции при малых величинах угла σ (рис. 355).

Но несомненным преимуществом косоугольных проекций является тот факт, что в этом случае мы совершенно свободны как в выборе направлений осей проекций, так и в выборе отношений между показателями искажений; в прямоугольных же проекциях (см. § 109) выбор значений двух величин полностью определяет проекцию.

Изометрические, диметрические или триметрические проекции? Конечно, проще всего строить изометрические проекции, так как масштаб по всем трём осям один и тот же.

Однако при прямоугольном проектировании, приняв изометрическую проекцию, мы вынуждены взять одинаковые углы между осями (120°); в результате на этой проекции (рис. 349) две вершины куба совпадают; три пары рёбер оказываются продолжением друг друга. Крупным недостатком данной проекции является уменьшение наглядности.

При косоугольном проектировании изометрия даёт иногда не слишком красивые изображения (рис. 356, правый столбец). Таким образом, в изометрии облегчение построения достигается за счёт наглядности.

В диметрических проекциях два различных масштаба, в триметрических—три. Вызываемое этим некоторое усложнение построения может быть оправдано получением более наглядного изображения.

На рис. 360 куб и прямоугольный параллелепипед изображены в десяти различных аксонометрических проекциях.

Первые четыре проекции—*изометрические*. Так как все три показателя искажения равны единице, то все отрезки, параллельные осям координат, проектируются без искажения; это—основное достоинство изометрических проекций.

а) *Прямоугольная изометрическая проекция* существует только одна: все три угла между аксонометрическими осями—по 120° . В этой проекции совпадают две вершины куба; три пары рёбер являются продолжением друг друга; это—крупный недостаток данной проекции (почему?).

Переходим к другим проекциям. Так как у каждого вида проекций существует бесчисленное множество разновидностей, то ниже приведены только наиболее часто применяемые на практике.

Косоугольные изометрические проекции. На рис. 360 приведены три из них:

- | | | |
|-----------------|---|--|
| б) фронтальная, | } | В этих проекциях плоскость проекций параллельна одной из координатных плоскостей. Следовательно, все фигуры, расположенные параллельно этой плоскости, проектируются без искажения, что является несомненным достоинством этих проекций. |
| в) военная, | | |
| г) лягушачья. | | |

Вторая четвёрка проекций—*диметрические*.

д) и е) Две *прямоугольные диметрические проекции*; они гораздо нагляднее изометрических, но это достигнуто ценою некоторого усложнения построений.

ж) и з) Две косоугольные диметрические (фронтальные) проекции; их построение сравнительно просто и они обладают тем же достоинством, что и все косоугольные проекции на плоскость, параллельную одной из плоскостей проекций. В отношении наглядности они уступают прямоугольным.

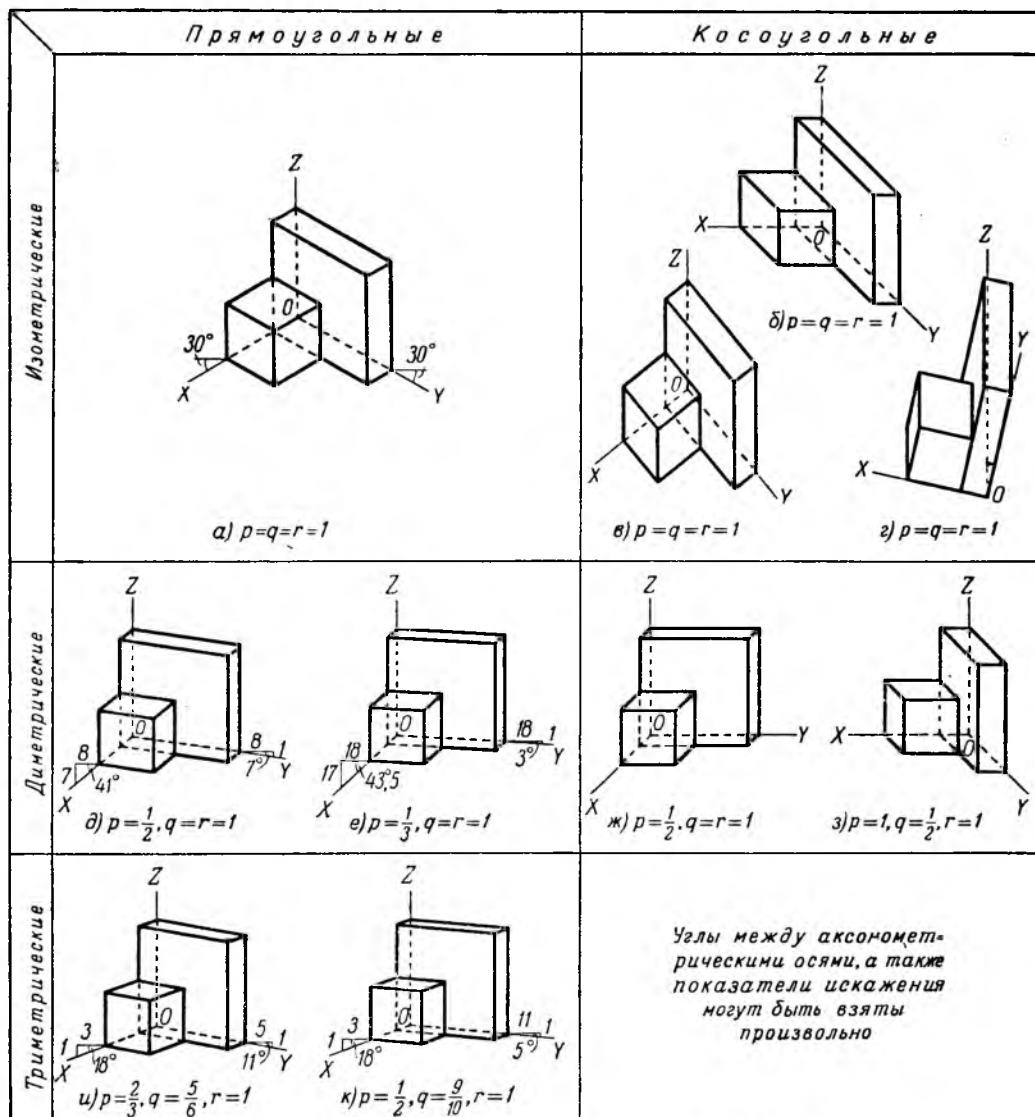


Рис. 360. Различные аксонометрические проекции.

Выбор той или другой из фронтальных проекций зависит от того, какую именно грань куба (и параллелепипеда) мы хотим получить без искажения. Наконец,

и) и к) Две прямоугольные триметрические проекции; они ещё нагляднее, нежели прямоугольные диметрические проекции д) и е).

л) Косоугольные триметрические проекции не даны на данном рисунке по той простой причине, что они могут быть вычерчены совершенно произвольно.

На рис. 361 даны примеры аксонометрических машиностроительных чертежей.

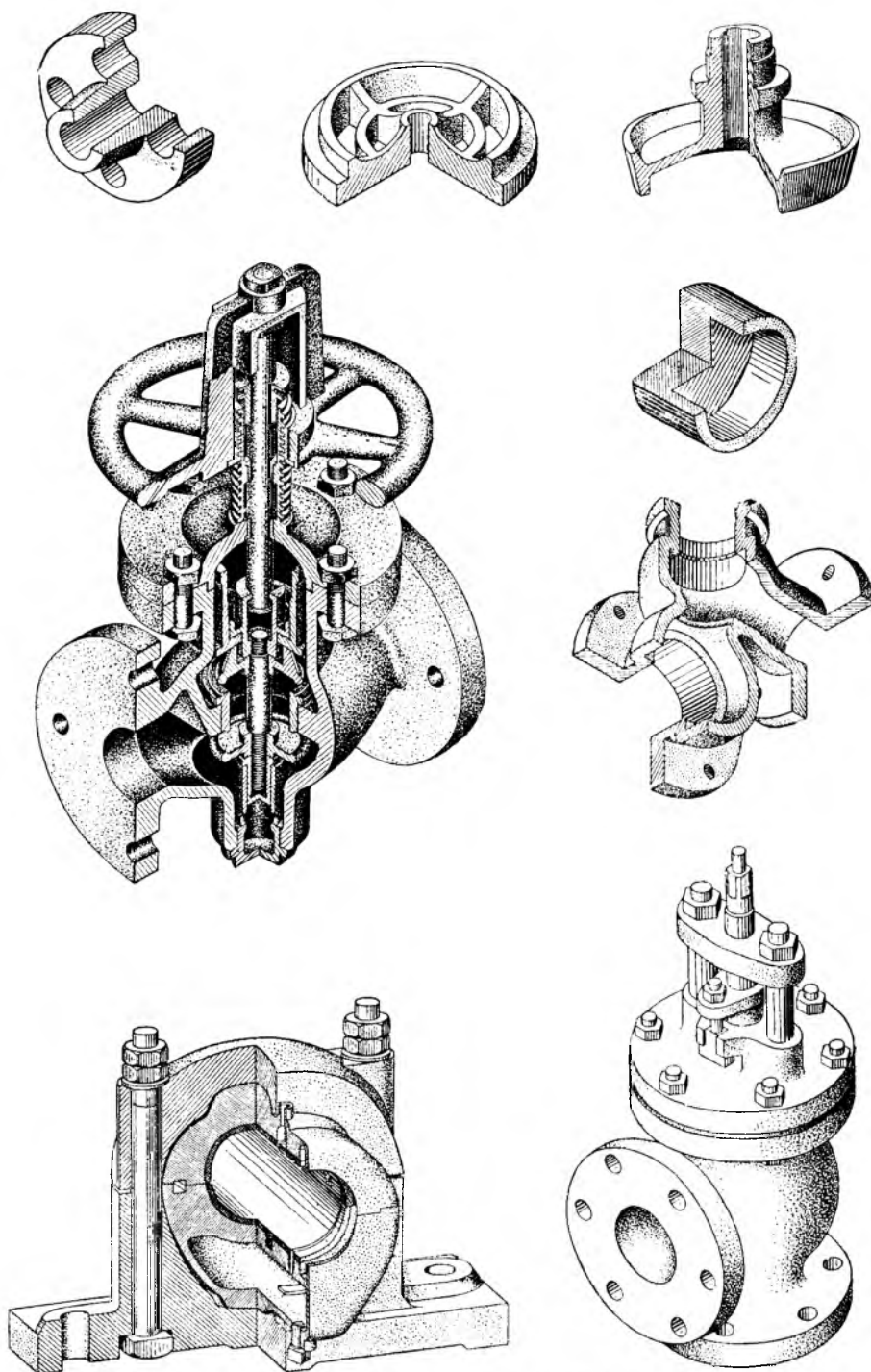


Рис. 361. Примеры машиностроительных аксонометрических чертежей.

§ 117. Построение теней на аксонометрической проекции

Ограничимся рассмотрением следующего примера. Построить тень, падающую в солнечный день от вертикальной стенки на ступеньки лестницы, если известно, что тень от точки O падает в точку I (рис. 362, а).

Если тень точки O падает в точку I , то тень участка AO ребра AB —отрезок $A—I$ (рис. 362, б). Тень участка OB , лежащего выше точки O , является продолжением отрезка $A—I$. Продолжаем прямую $A—I$ до точки 2 . Отрезок $A—2$ —тень от нижней части ребра AB , падающая на нижнюю площадку лестницы.

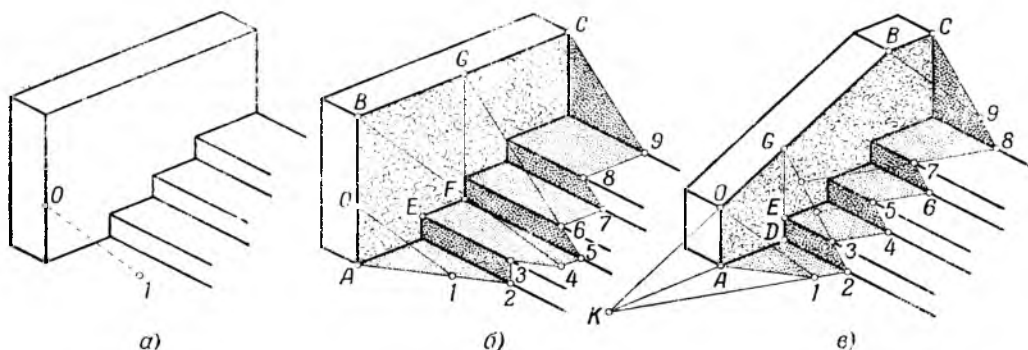


Рис. 362. Тень на лестнице.

Как пойдёт контур падающей тени дальше? Ребро AB —вертикальное; следовательно, проходящая через него плоскость тени тоже вертикальна. Передняя грань нижней ступеньки вертикальна; следовательно, в пересечении с плоскостью тени образуется вертикальная прямая. Поэтому проводим $2—3$ параллельно AB .

Плоскость тени, падающей от ребра AB , пересекается двумя параллельными плоскостями: горизонтальной плоскостью первой ступени и горизонтальной плоскостью перед первой ступенью. Поэтому проводим $3—4$ параллельно $A—2$. Проведя $B—4$ параллельно $O—I$, получаем точку 4 —последнюю точку тени, падающей от ребра AB .

Тень горизонтального ребра BC на ступени FE проводим параллельно BC до пересечения в точке 5 с границей этой ступени.

Для получения тени продолжения ребра BC на вертикальной грани следующей ступени мы заметим, что если бы на пути тени стояла непрозрачная вертикальная плоскость $G—F—5$, то тень точки G совпала бы с самой этой точкой и, следовательно, искомая тень пошла бы по прямой $5—G$. Но в нашем случае эта плоскость доходит только до горизонтальной плоскости ступени, поэтому мы доводим её только до точки 6 .

Далее проведём $6—7$ параллельно BC ; $7—8$ параллельно $5—6$; $8—9$ параллельно BC . Ломаная $A—I—2—3—4—5—6—7—8—9—C$ и есть тень ломаной ABC .

На рис. 362, б заштрихованы собственная и падающая тени стены.

На рис. 362, в изображён другой вариант этой задачи. Читатель без труда разберётся в этом чертеже.

ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

§ 118. Проекция точки

Возвратимся к мячу, о котором шла речь в начале книги (рис. 22 на стр. 16). Пусть нам опять нужно зафиксировать его положение в пространстве, но на этот раз мы находимся на большом расстоянии от стены комнаты или даже поблизости вовсе нет стены (например, мы находимся на площади или в поле). Одну метку—на полу, либо на асфальте, либо просто на земле—сделать нетрудно, а как быть со второй меткой?

В этих случаях положение точки в пространстве можно определить следующим образом.

Опустим (как мы и раньше делали) из данной точки перпендикуляр на горизонтальную плоскость; мы получим горизонтальную проекцию точки. Зная эту горизонтальную проекцию, мы можем утверждать, что сама точка лежит на отвесной прямой, проходящей через её горизонтальную проекцию, но где именно? Для ответа на этот вопрос следует измерить расстояние от точки до плоскости проекций и записать полученное число непосредственно у горизонтальной проекции точки. Например, на рис. 363 мяч в правой руке мальчика (точка A) поднят на 120 см над плоскостью пола, а мяч в левой руке — на 140 см (точка B). Эти числа написаны около проекций a и b соответствующих точек.

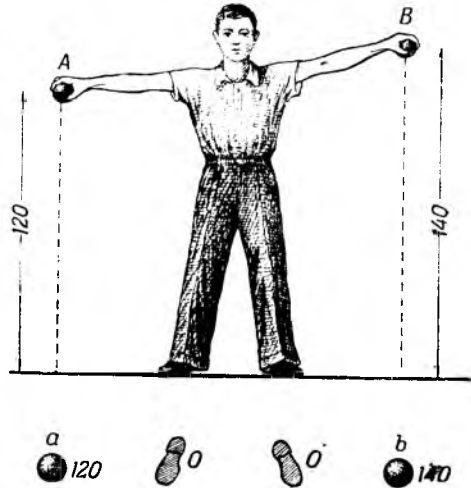


Рис. 363. Изображение точки в проекциях с числовыми отметками.

Высота точки над плоскостью проекций называется «*отметкой*» точки; отсюда—название этого метода изображений: «*проекция с числовыми отметками*».

Подошвы мальчика находятся в плоскости проекций, поэтому у них стоит отметка 0 (нуль).

§ 119. Изображение поверхностей

Если нам нужно изобразить в проекции с числовыми отметками не одну-две, а много точек, лежащих на заданной поверхности S , то чертёж будет испещрён множеством цифр, и в нём будет трудно разобраться. В этом случае прибегают к следующему простому приёму.

Остановим наше внимание на какой-либо одной точке A и проведём мысленно по поверхности через эту точку и через все другие точки B, C, D и т. д., имеющие ту же отметку, линию (рис. 364). Все точки, лежащие на этой линии, находятся в некоторой горизонтальной плоскости P ; поэтому такая линия называется *линией уровня*, или *горизонталью поверхности**).

Нам остаётся спроектировать линию уровня (без искажения) на горизонтальную плоскость проекций и написать на ней всего лишь один или два раза общую отметку всех точек данной горизонтали (на рис. 364 это — отметка 23).

Проекции с числовыми отметками применяются главным образом для изображения рельефа земной поверхности (рис. 365).

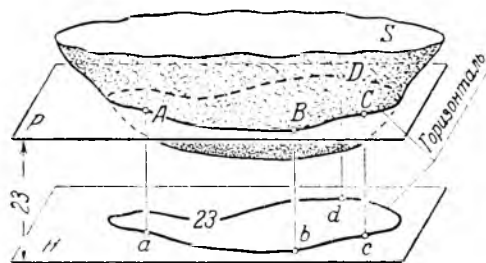


Рис. 364. Горизонталь поверхности.

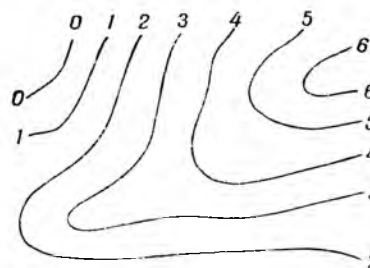


Рис. 365. Изображение рельефа земной поверхности.

За плоскость проекций обычно принимают постоянный уровень воды в море. Поэтому горизонталь, проведённая по урезу воды—нулевая горизонталь. Цифра, стоящая у горизонтали, показывает высоту точек над уровнем воды в море.

Отметки точек, расположенных ниже плоскости, условно принятой за нуль,—отрицательные; их обычно пишут со знаком — (минус).

Если бы уровень воды поднялся на 1 м, то урез воды проходил бы по горизонтали 1; если бы уровень воды поднялся ещё на 1 м, то береговой линией стала бы горизонталь 2 и т. д. Наоборот, если бы уровень воды понизился на 1 м, то береговой линией стала бы горизонталь —1 и т. д.

Во многих случаях горизонтали проводят через каждый метр высоты. При изображении участков земли со сравнительно спокойным рельефом горизонтали проводят чаще: через 0,5 м. При изображении же сильно пересечённой местности—гор, оврагов—горизонтали, наоборот, проводят реже: через 2 м, 5 м, 10 м и более.

На рис. 366 изображено Чёрное море с пятью горизонталями дна, соответствующими глубинам 100, 500, 1000, 2000 и 2200 м. Почему выбраны эти глубины? Почему здесь интервалы между горизонталями разные?

Первая горизонталь дна показывает места с глубиной 100 м; если бы мы захотели при помощи горизонталей показать места с глубиной 10, 20, 30 и т. д. метров, то у берегов Кавказа при данном масштабе карты горизонтали были бы расположены так близко друг к другу, что они просто слились бы.

Почему следующая после 2000 м горизонталь—2200 м, а не 3000 м? Потому, что в наиболее глубоких местах Чёрного моря его глубина не превышает 2300 м.

*) Обратим внимание на то, что раньше мы применяли название «горизонталь» для прямой линии, лежащей в заданной плоскости и параллельной плоскости H . Ясно, что новое определение горизонтали не противоречит старому, а является его обобщением: если рассматриваемая поверхность является плоскостью, то её горизонталь (в новом определении) является той прямой, которую мы раньше называли горизонталью.

В Азовском море не проведено ни одной горизонтали: в нём нет ни одного места глубиной 100 или более метров. На плане Чёрного моря минусы не представлены, так как ясно, что речь идёт о глубинах моря.

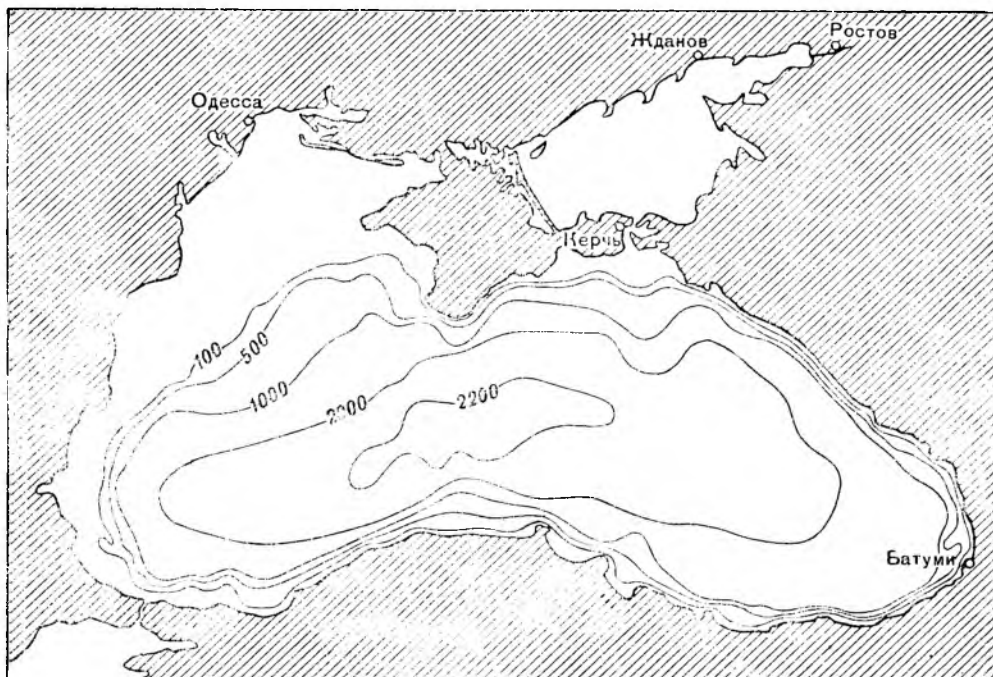


Рис. 366. Горизонтали дна Чёрного моря.

На рис. 367 показан холм. Наверху—обычная ортогональная проекция на вертикальную плоскость, а внизу—план с горизонталями, т. е. проекция с числовыми отметками.

На рис. 368 показана яма—также в двух проекциях.

Как мы видим, проекции с числовыми отметками получились для холма и для ямы почти одинаковыми: линии горизонталей изображены совершенно одинаково, но цифры у них стоят разные. По цифрам легко определить, что на рис. 367 на участке, ограниченном горизонталью с отметкой 4, находится самая высокая точка, а на рис. 368, наоборот,—самая низкая (отметка —4).

Из рис. 367 и 368 ясно, что где горизонтали гуще, там круче поверхность.

По какому склону холма легче подняться: по правому или левому? (Не смешивайте с вопросом: по какому склону ближе?)

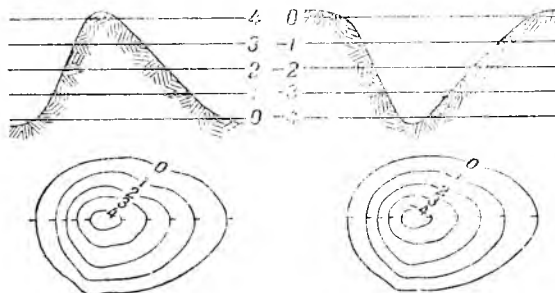


Рис. 367. Холм в разрезе и в проекции с числовыми отметками.

Рис. 368. Яма в разрезе и в проекции с числовыми отметками.

Дорога (железная или автомобильная), проложенная вдоль какой-либо горизонтали, не будет иметь ни подъёмов, ни спусков. Наоборот, чем чаще дорога будет переходить с одной горизонтали на следующую, тем круче будут подъёмы (или спуски).

Идёт дождь. Каждая капля скатывается по поверхности земли вниз, перпендикулярно к горизонтали, проходящей через точку, в которой в данный момент она находится, по кратчайшему пути к следующей горизонтали. Линия, по которой покатится капля, называется, как мы знаем из § 46 (рис. 130 на стр. 67), *линией наибольшего ската*.

На планах с горизонталями часто обозначают направление линий наибольшего ската коротенькими чёрточками, перпендикулярными к горизонталям; присмотритесь к рис. 367 и 368, теперь на них и без цифр видно, где—холм и где—яма.

§ 120. Некоторые примеры из техники

Корпус судна—тело довольно сложной формы. Для его изображения (рис. 369) проводят три системы взаимно перпендикулярных плоскостей и строят линии их сечения с наружной поверхностью корпуса. Секущие плоскости проводят:

1) *Горизонтально*; образующиеся линии сечения *I, II, III, ...* называются «*ватерлиниями*», так как именно такие линии прочертит вода*) на корпусе при его последовательном погружении в воду.

На боковом виде корпуса, а также на виде спереди (с носа) и сзади (с кормы) ватерлинии изображаются горизонтальными прямыми линиями;

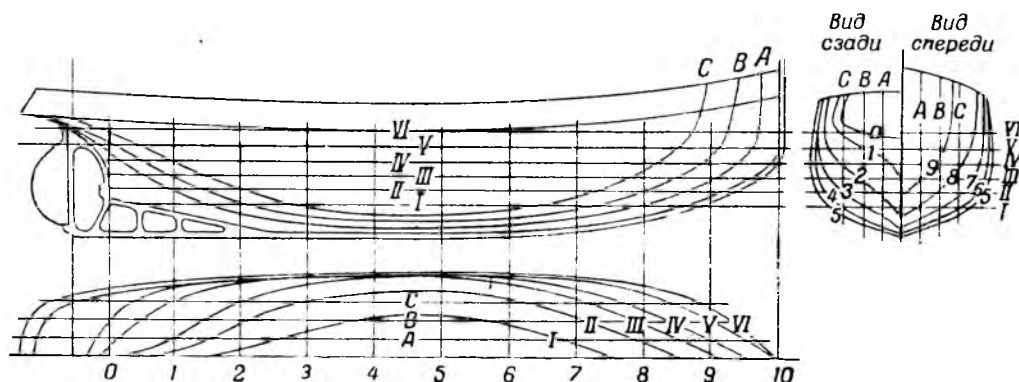


Рис. 369. Корпус судна.

все ватерлинии получаются на плане без искажения. Ватерлинии—это знакомые нам горизонтали.

2) *Вертикально, параллельно продольной оси судна*—так называемые *плоскости батоксов*; соответствующие линии сечения *A, B, C* изобразятся на плане и на виде спереди (и сзади) прямыми линиями, а на боковом виде—кривыми линиями.

3) *Вертикально, перпендикулярно продольной оси судна*—*плоскости шпангоутов*; линии сечения *0, 1, 2, ..., 10* изобразятся на плане и на боковом виде прямыми линиями, а на виде спереди (и сзади) кривыми линиями.

Почему для изображения корпуса судна достаточен один вид сбоку и всего половина плана, а в то же время требуется и вид спереди и вид сзади?

При строительстве дорог, каналов, зданий и т. д. строителям приходится устраивать в земле выемки и возводить из земли насыпи. Для изображения насыпей и выемок удобно применять проекции с числовыми отметками.

*) «Water»—вода (англ.).

Пусть, например, на горизонтальном участке необходимо вырыть котлован для устройства фундамента, имеющего в плане форму квадрата $ABCD$ со стороной 4 м (рис. 370). Если бы грунт мог держаться при вертикальных стенках, то самым экономичным было бы вырыть в земле котлован в виде

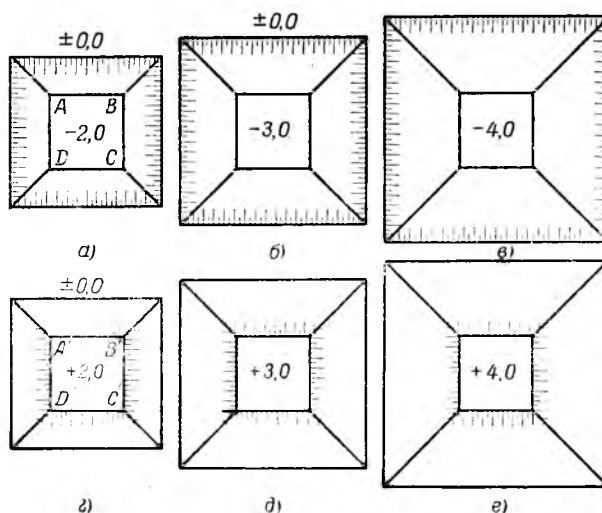


Рис. 370. Котлованы и насыпи.

прямой призмы с основанием $ABCD$ и высотой, равной требуемой глубине заложения фундамента. Однако большинство грунтов неспособно сохранять вертикальные стенки, поэтому приходится устраивать стенки котлованов в виде откосов. Уклон, придаваемый откосам, зависит от грунта.

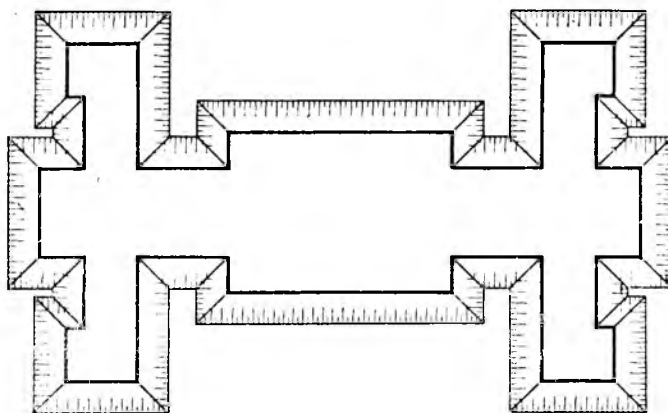


Рис. 371. Котлован главного здания Московского государственного университета на Ленинских горах.

Каков бы ни был грунт, т. е. каковы бы ни были откосы котлована, линии сечения двух смежных откосов проектируются на горизонтальную проекцию по направлениям биссектрис углов ломаной, ограничивающей контур котлована (почему?).

Как далеко нужно чертить биссектрисы углов? Это зависит, во-первых, от глубины выемки, во-вторых, от угла наклона, который необходимо придать данному грунту. Пусть в нашем примере грунту необходимо придать уклон 1 : 1, т. е. ширина (в плане) каждого откоса должна быть равна глубине котлована. На рис. 370, а, б, в показаны три котлована для одного и

и того же фундамента и при одинаковых углах откосов, но при разной глубине котлованов: 2, 3 и 4 м. Эти котлованы имеют форму усечённой пирамиды, обращённой своим бóльшим основанием кверху.

На рис. 370, *г*, *д* и *е* в проекциях с числовыми отметками показаны три насыпи высотой соответственно 2, 3, 4 м, верхняя площадка которых $A'B'C'D'$ —такой же квадрат, как $ABCD$. Так как откосы насыпей те же, что и откосы котлованов (1 : 1), то мы получим те же самые усечённые пирамиды, но обращённые бóльшим основанием книзу.

Хотя изображения в обоих случаях получились одинаковые, отличить насыпь от выемки нетрудно по отметкам. Однако для наглядности принято штриховать откосы по их верхней линии (называемой «бровкой»); штрихи показывают направление, по которому покатится вода или камешек. Нулевая отметка обозначается на таких чертежах так: $\pm 0,0$.

У п р а ж н е н и е. Постройте проекции тех же котлованов и насыпей, но при грунте, который держится при более крутых откосах, а именно 2 : 1.

На рис. 371 показан огромный котлован, который был вырыт для главного здания Московского государственного университета на Ленинских горах. Длина главного корпуса—около 240 м, глубина котлована—13 м.

ГЛАВА XVII

ПЕРСПЕКТИВА

§ 121. Понятие о перспективе

Мы познакомились с тремя методами изображения при помощи параллельного проектирования, а именно: с ортогональными проекциями на две (и три) плоскости, с аксонометрическими проекциями и, наконец, с проекциями с числовыми отметками.

Каждый из этих видов параллельных проекций имеет свои достоинства и недостатки, поэтому тот или иной из них следует применять в зависимости от особенностей изображаемого предмета и от цели, с которой необходимо построить изображение.

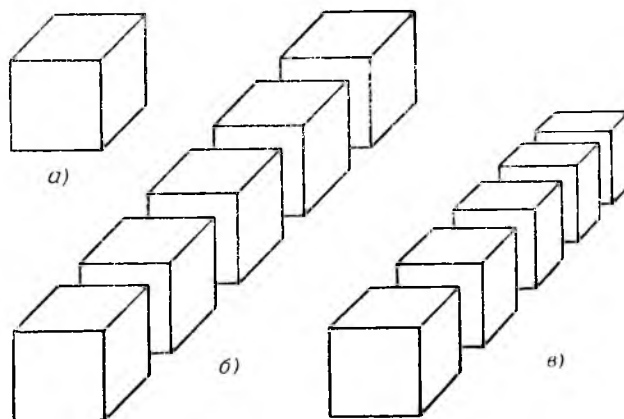


Рис. 372. Как ряд кубов изображается в аксонометрии (б) и как он представляется нашему глазу (в)

Напомним, что поиски изображения, более наглядного, чем обычные ортогональные проекции, привели нас к аксонометрии. Однако и в аксонометрических проекциях изображения предметов оказываются всё же не совсем такими, какими они представляются нашему глазу.

В самом деле, на рис. 372, а изображён в аксонометрической проекции куб, а на рис. 372, б (в той же аксонометрической проекции)—несколько поставленных в ряд одинаковых кубов. Если бы мы изготовили кубы и поставили бы их один за другим, то они представились бы нашему глазу не так, как изображено на рис. 372, б, а так, как показано на рис. 372, в. Одним из характерных отличий рис. 372, в от рис. 372, б является то, что равные в натуре отрезки кажутся нашему глазу тем меньшими, чем более удалены они от нас.

На рис. 373 показана часть галлерей Химкинского речного вокзала в Москве. Сравните между собой размеры колонн: в натуре они все совершенно одинаковы, но по мере удаления от нашего глаза, они кажутся нам всё меньшими и меньшими. Последняя колонна кажется в три с лишним раза меньше первой.

Кубы на рис. 372, в и галерея речного вокзала на рис. 373 даны в центральной (конической) проекции, называемой также *перспективой* *).

Мы теперь вплотную подошли к центральной (конической) проекции, о которой уже говорилось во введении (§§ 1 и 2).

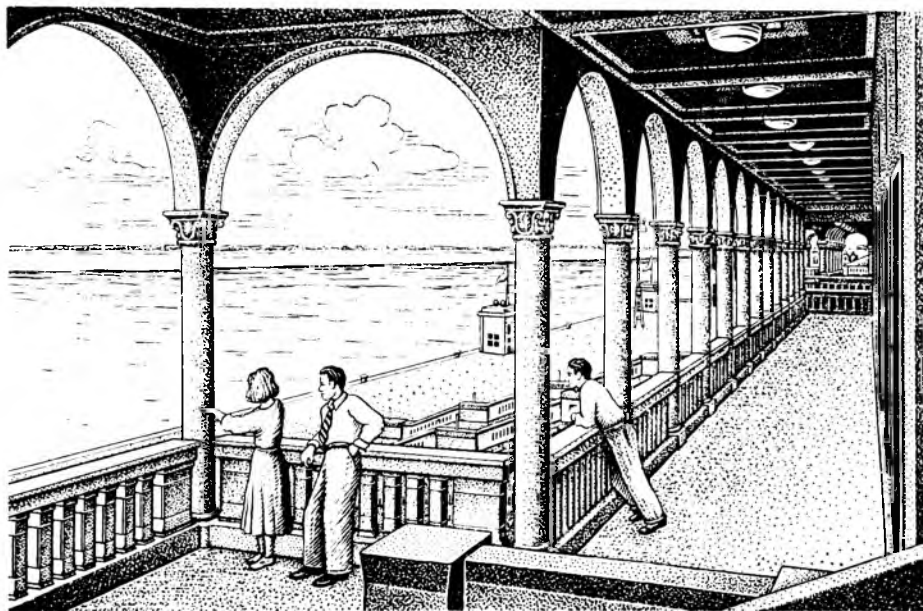


Рис. 373. Галерея Химкинского речного вокзала в Москве (канал им. Москвы). Колонны кажутся уменьшающимися по мере удаления.

Прочтите ещё раз всё, что было сказано во введении о центральных проекциях.

Рассматривая предметы, наш глаз мысленно проектирует их центрально на плоскость (обычно вертикальную).

Станьте на некотором расстоянии от окна и взгляните сквозь стекло на улицу. Вообразите видимую часть улицы в виде рисунка на стекле. Это—*перспективное изображение (перспектива)* улицы.

Плоскость, на которую производится проектирование при построении перспективы, называется *картинной плоскостью* (в приведённом примере картинной плоскостью служит оконное стекло), или, короче, *картиной*.

Пусть на вертикальной плоскости—стекле P —нарисована некоторая фигура, например буква A (рис. 374, а). Поставим ещё два стекла, параллельных первому: одно из них (P') впереди плоскости P , а другое (P'')—позади плоскости P . Спроектируем (центрально) фигуру A на плоскость P' и на плоскость P'' . Полученные нами проекции являются фигурами, подобными данной. Проекция на плоскость, расположенную между глазом и оригиналом, оказывается меньше, чем оригинал; проекция на плоскость, находящуюся за оригиналом,—больше, чем оригинал.

*) Слово «перспектива» происходит от латинского «perspicere», что означает «видеть сквозь».

Понятно, что фигуры, лежащие в самой картинной плоскости, проектируются на неё же без всякого искажения.

Итак, *перспективное изображение подобно проектируемой плоской фигуре в том случае, если плоскость фигуры параллельна картине (плоскости проекций). Коэффициент подобия равен отношению расстояний центра проекций от плоскости проекций и от плоскости фигуры.*

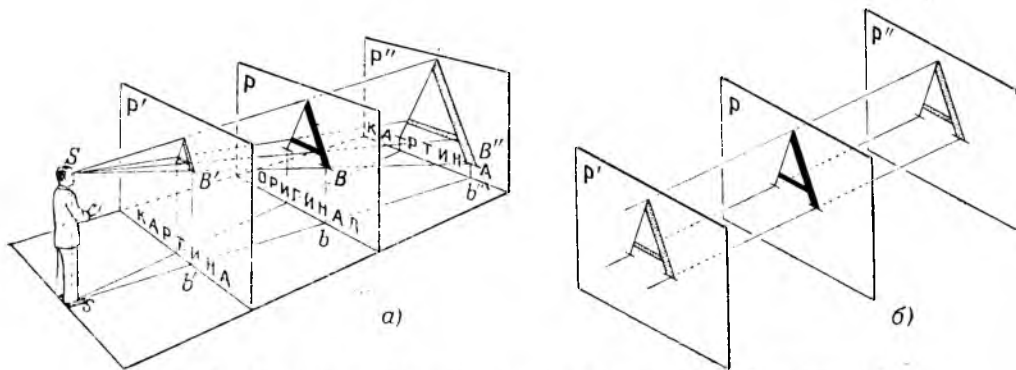


Рис. 374. Сопоставление перспективы с параллельной проекцией.

Если центр проекций будет неограниченно удаляться от картинной плоскости, то перспектива будет становиться всё более похожей на параллельную проекцию. Поэтому изображения в параллельной проекции показывают нам предметы такими, какими они кажутся при рассматривании издалека (рис. 374, б).

Рассмотрим теперь тот случай центрального проектирования, когда плоскость картины не параллельна плоскости фигуры.

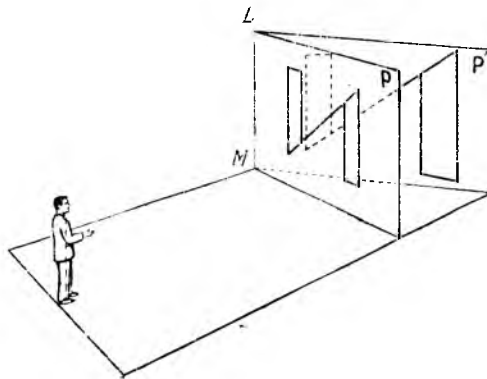


Рис. 375. Случай, когда плоскость, в которой находится оригинал, не параллельна картинной плоскости.

Пусть буква **И**, начерченная на плоскости P , проектируется на плоскость P' , пересекающуюся с плоскостью P по прямой LM (рис. 375). Теперь перспективное изображение уже не будет подобно оригиналу: так, на перспективе левая «ножка» буквы **И** значительно короче правой.

Таким образом, при построении перспективы многогранника только те его грани, которые параллельны плоскости картины, сохраняют на изображении свою форму; все же остальные грани, не параллельные плоскости картины, изображаются с бóльшим или меньшим **и с к а ж е н и е м** формы.

Идя по тротуару, понаблюдайте за вашей тенью (рис. 376).

При близком источнике света тень—это центральная проекция; тень от удалённого источника света (например, от солнца) можно практически рассматривать как параллельную проекцию.



Рис. 376. По мере удаления человека от фонаря его тень удлиняется.

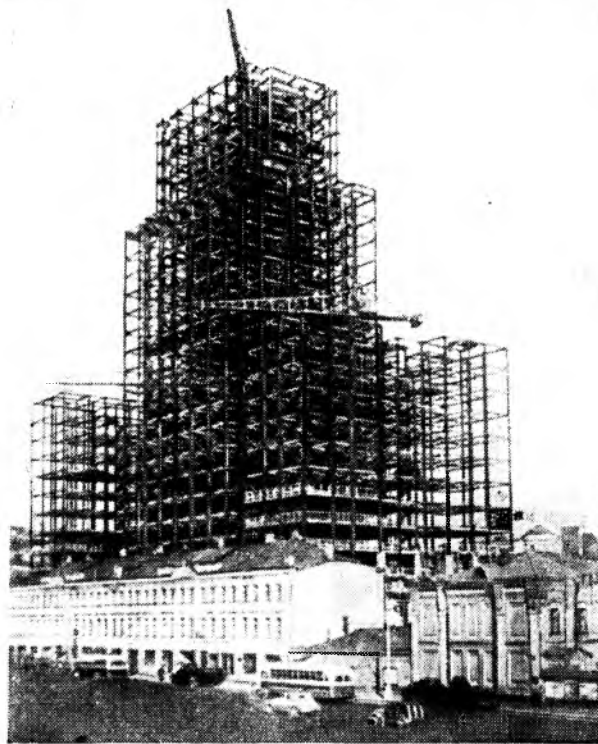


Рис. 377. Фотография строительства высотного здания на Смоленской площади в Москве.

Перспективные изображения лежат в основе фотографии. На рис. 377 изображён фотоснимок строительства высотного здания, с которым мы познакомились во введении. Это—перспектива здания.

У п р а ж н е н и е. Возьмите небольшой ящик (рис. 378) и смонтируйте в него электрическую лампочку. Одну из стенок (P) сделайте из стекла (можно и из кальки), предварительно начертив на ней какую-либо фигуру. Установите параллельно P непрозрачную пластинку P_0 с отверстием O в центре.

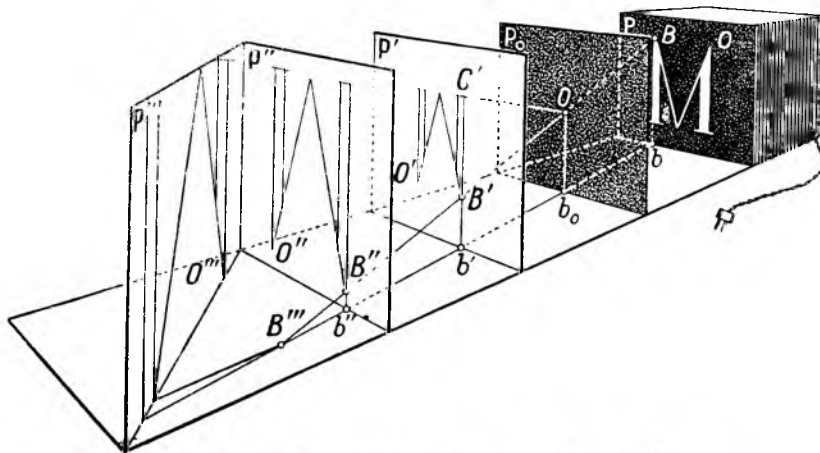


Рис. 378. Геометрический принцип фотографии.

Повторите содержание всего этого параграфа. Проследите за изменением центральной проекции фигуры при параллельном перемещении картины, а также при её вращении.

§ 122. Основные термины, применяемые в перспективе

Нам уже известны следующие термины, относящиеся к перспективе (рис. 379):

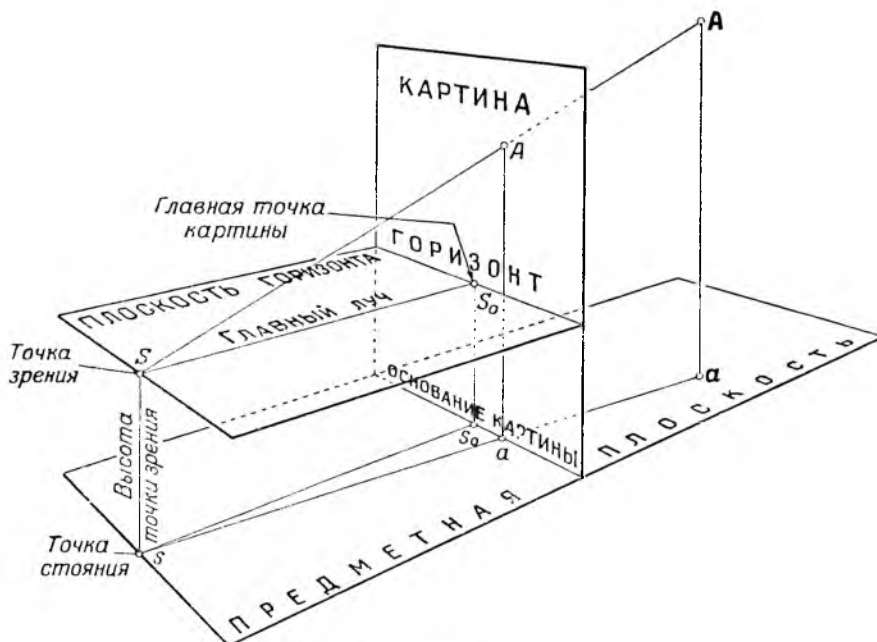


Рис. 379. Элементы перспективы.

Центр проекций, или, иначе, точка зрения (S).

Картинная плоскость, или, короче, картина.

Оригинал—например точка А.

Перспектива оригинала—точка A .

Познакомимся с некоторыми новыми терминами.

Плоскость горизонта—горизонтальная плоскость, проходящая через точку зрения.

Линия горизонта, или, короче, *горизонт*—линия сечения плоскости горизонта с картинной плоскостью.

Предметная плоскость—горизонтальная плоскость, на которой стоит наблюдатель и на которую ставят изображаемые предметы *).

Точка стояния (s)—основание перпендикуляра, опущенного на предметную плоскость из точки зрения.

Главный луч (SS_0)—перпендикуляр, опущенный из точки зрения на картину.

Главная точка картины (S_0)—точка пересечения главного луча с плоскостью картины.

Основание картины—линия пересечения картинной плоскости с предметной плоскостью.

Основание оригинала (a)—прямоугольная проекция оригинала на предметную плоскость.

Перспектива основания (a).

Высота точки зрения ($Ss = S_0s_0$)—превышение точки зрения над её основанием, или, что то же самое, превышение линии горизонта над основанием картины.

Угол зрения—плоский угол (горизонтальный или вертикальный) между двумя крайними лучами.

Перспективу называют *фронтальной*, если картина параллельна одной из основных вертикальных плоскостей оригинала (например, стене дома).

§ 123. Основные свойства перспективы

Как нам хорошо известно, при параллельном проектировании проекции любых параллельных и равных отрезков—также параллельные и равные отрезки.

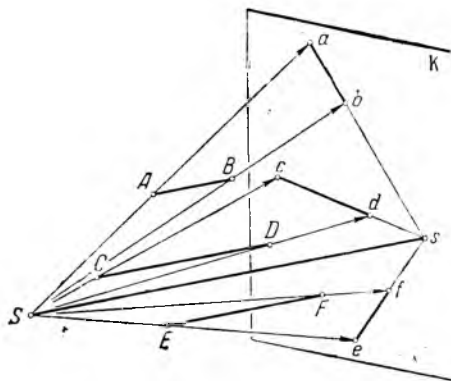


Рис. 380. Точка схода параллельных прямых.

При центральном же проектировании дело обстоит иначе. Проекции параллельных прямых останутся параллельными прямыми только в том случае, если прямые-оригиналы параллельны плоскости проекций. Например, если картина вертикальна, то все вертикальные прямые-оригиналы проектируются в виде взаимно параллельных вертикальных прямых.

Если же параллельные прямые-оригиналы AB , CD , EF (рис. 380) не параллельны плоскости проекций, то их центральными проекциями ab , cd , ef являются пересекающиеся пря-

мые, проходящие через одну точку s^{**}). Такая точка на перспективе называется *точкой схода* прямых данного направления.

Точка схода прямых данного направления—это та точка, в которой луч, проведённый через центр S проекций параллельно данному направлению, встречает картинную плоскость.

*) Если предметная плоскость находится на уровне земной поверхности, то её иногда называют просто «земля».

**) Доказательства этого здесь не приводится.

В том частном случае, когда прямые одного направления горизонтальны, их точка схода на вертикальной картине находится на линии горизонта.

В частном случае, когда горизонтальные прямые параллельны главному лучу (т. е. перпендикулярны к плоскости картины), их точкою схода является главная точка картины (рис. 381).

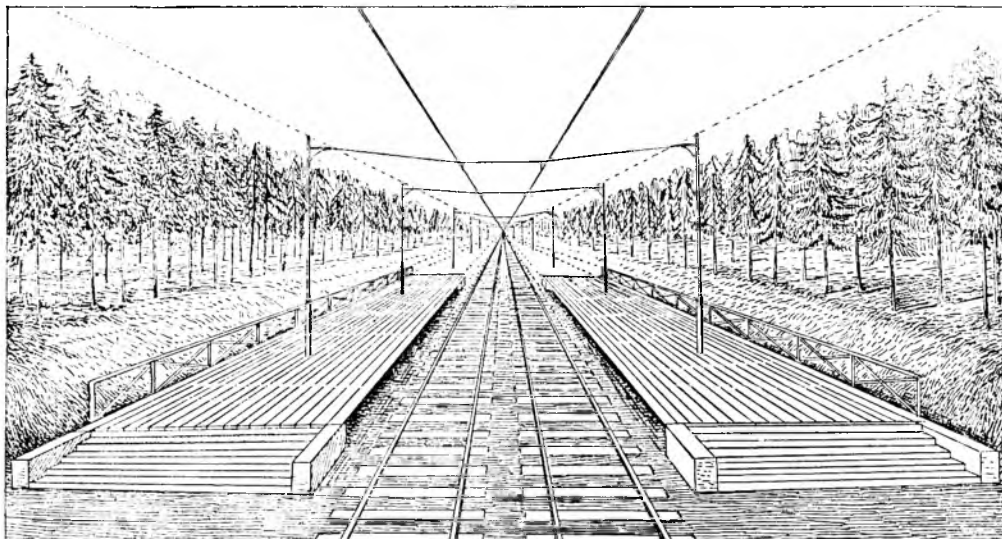


Рис. 381. Перспектива железнодорожных путей.

У п р а ж н е н и е. Подумайте: когда параллельные и равные отрезки-оригиналы изображаются параллельными и равными отрезками и на перспективе?

§ 124. Построение перспективы по ортогональным проекциям

Перспективу (т. е. центральную проекцию) строят по двум или трём прямоугольным проекциям оригинала: по плану, виду спереди—фасаду и боковому виду.

Установим связь между этими четырьмя проекциями одной и той же фигуры (оригинала) для случая, когда картина вертикальна (наклонная картина встречается очень редко).

Пусть оригинал—треугольная пирамида $ABCD$ произвольной формы, занимающая случайное положение (рис. 382). Её проекция на плоскость H —полный четырёхугольник*) $abcd$, а проекция на плоскость V —полный четырёхугольник $a'b'c'd'$.

Пусть точка S —центр центральной проекции, а плоскость K —картина. Плоскость K , как сказано выше, вертикальна, т. е. перпендикулярна к плоскости проекций H , но она не перпендикулярна к плоскости V (т. е. плоскость K не параллельна плоскости W^{**}).

Обозначим через OT линию сечения плоскостей K и V ($OT \perp H$).

Найдём перспективу точки A —точку a_0 . Из центра S проводим через точку A луч SA ; искомая точка a_0 —след луча SA на плоскости K ; так как sa —горизонтальная проекция этого луча, то точка a_h —горизонтальная проекция искомой точки a_0 ; проводим $a_h a_0 \parallel OT$. Где-то на $a_h a_0$ должна лежать искомая точка a_0 .

Аналогично проводим прямые sb , sc , sd и затем вертикальные прямые через точки b_h , c_h , d_h ; где-то на них должны лежать искомые точки b_0 , c_0 , d_0 .

*) См. стр. 187.

**) Плоскость W на рисунке не показана.

Итак, для того чтобы по прямоугольной горизонтальной проекции оригинала построить прямые, на которых лежат перспективы характерных точек некоторой фигуры (при условии, что K перпендикулярно H), нужно выполнить следующие построения:

1) в плоскости H : провести из горизонтальной проекции s точки зрения S лучи через характерные точки горизонтальной проекции оригинала до встречи с основанием картины;

2) в плоскости K : провести через полученные на основании картины точки прямые, перпендикулярные основанию картины.

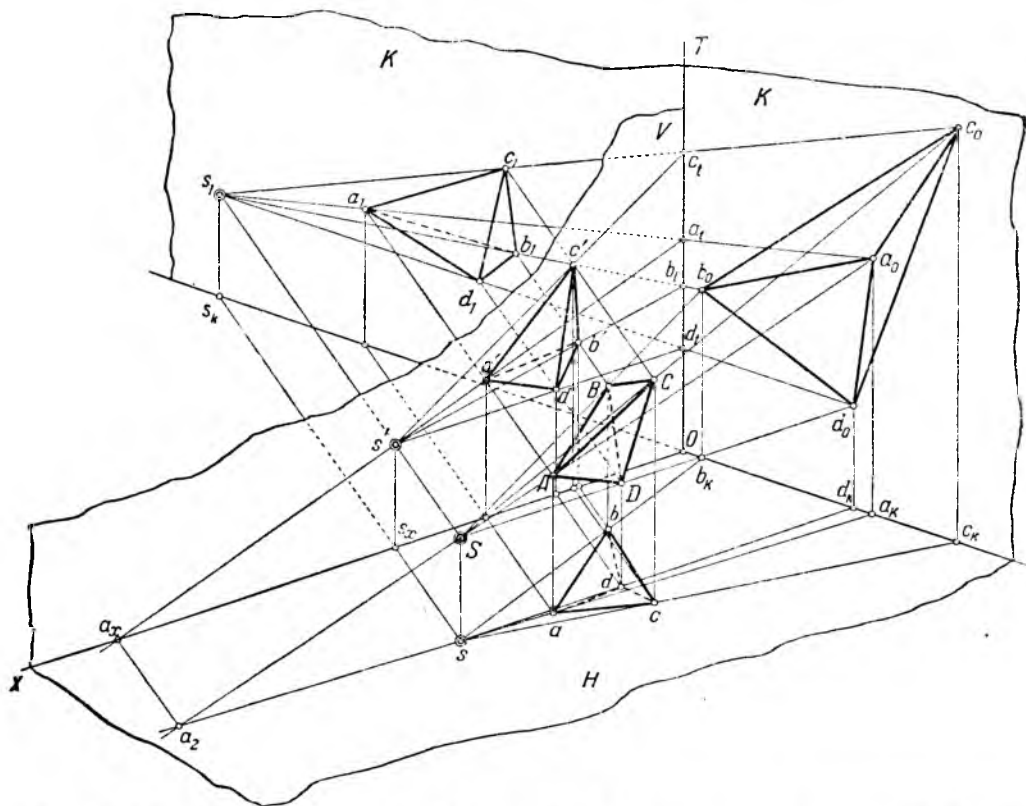


Рис. 382. Связь между центральной проекцией и ортогональными проекциями тела.

Обратимся теперь ко второй данной проекции нашей пирамиды—к проекции $a'b'c'd'$ на вертикальную плоскость проекций V . На этой плоскости: s' —проекция точки зрения; $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$ и $s'd'$ —проекции центрально-проектирующих лучей.

Находим точки a_1 , b_1 , c_1 и d_1 —точки пересечения вертикальных проекций лучей с прямой OT .

Спроектируем точку S и оригинал $ABCD$ на плоскость K по тому направлению, по которому получены проекции s' , a' , b' , c' и d' . Для этого продолжим ss_x до пересечения с основанием картины; получим точку s_x ; продолжим Ss' до пересечения в точке s_1 с прямой, проведенной через точку s_x параллельно OT ; получим точку s_1 ; аналогично строим точки a_1 , b_1 , c_1 и d_1 .

Полный четырехугольник $a_1b_1c_1d_1$ —косоугольная проекция пирамиды $ABCD$ на плоскость K ; s_1a_1 , s_1b_1 , s_1c_1 и s_1d_1 —косоугольные проекции на плоскость K лучей SA , SB , SC и SD . Очевидно, что s_1a_1 встречается прямую OT в той же точке a_1 , что и луч $s'a'$. Следовательно, никакой необходимости строить косоугольную проекцию $a_1b_1c_1d_1$ пирамиды на плоскость K

Пометьте на ортогональных проекциях характерные точки оригинала и проследите за построением перспективы каждой из них.

На рис. 383 перспектива каждой точки получена как пересечение трёх прямых; в этом никакой необходимости нет—достаточно и двух прямых; следовательно, мы можем построить перспективу по любым двум ортогональным проекциям (например, по плану и фасаду, либо по фасаду и боковому виду и т. д.).

Читателю рекомендуется на первых порах строить перспективу по трём проекциям—для самопроверки.

На рис. 383 на план кроме заданной горизонтальной проекции дома нанесён также и увеличенный (вдвое) план,—это может оказаться удобным при детализовке чертежа.

На рис. 384 показано построение перспективы части подземного зала станции «Сокол» Московского метрополитена. Этот зал представляет собой два горизонтальных круговых полуцилиндра, пересечённых вертикальными круговыми цилиндрами.

Техника построения: из точки S (точки стояния) проведены горизонтальные проекции проектирующих лучей через все характерные точки плана до встречи с основанием картины; через найденные точки проведены вертикальные прямые.

Из точки S'^* —вертикальной проекции центра проекций—проведены вертикальные проекции проектирующих лучей через те же характерные точки до пересечения со следом плоскости V на плоскости K .

Из точки S_{k1} —левой точки схода прямых, параллельных осям горизонтальных полуцилиндров,—проведены лучи через точки, найденные на общей прямой плоскостей V и K .

На пересечении соответственных пар лучей находим искомые проекции характерных точек; соединив их плавными кривыми, получим искомую перспективу.

Правая точка схода—точка S_{k2} —построена только для контроля.

В этом построении интересно также и то, что мы построили сразу перспективу линии сечения двух тел, заданных ортогональными проекциями.

§ 125. Построение перспективы радиальным способом

Поясним этот способ примером. Пусть требуется построить перспективу ограды, имеющей квадратную форму. На рис. 385, а изображены ортогональные проекции этой ограды.

Совместим условно план $ABCD$ ограды с её фасадом AA_2B_2B (рис. 385, б). Примем плоскость передней стороны AA_2B_2B ограды за картинную плоскость; пусть S —точка зрения, а точка S_0 —главная точка картины.

Все построения сделаны на этом же чертеже, причём мы попеременно рассматриваем его либо как план ортогональной проекции, либо как фасад ортогональной проекции и как совпадающую с ней картинную плоскость перспективы.

Сторона AA_2B_2B ограды лежит в картинной плоскости. Она изобразится в перспективе без искажения. Таким образом, перспектива одной стороны ограды у нас уже имеется.

Соединим главную точку S_0 картины со всеми характерными точками на фасаде (A , A_1 , A_2 , B , K , L и другими). Правая боковая сторона ограды представлена на плоскости V отрезком AA_2 ; поэтому на перспективе она окажется на лучах S_0A , S_0A_1 и S_0A_2 .

Точки D , D_1 и D_2 спроектируются в точку d , если рассматривать отрезок AB как горизонтальную проекцию картинной плоскости; точки D' , D'_1

*) $S'S_x$ —высота точки зрения.

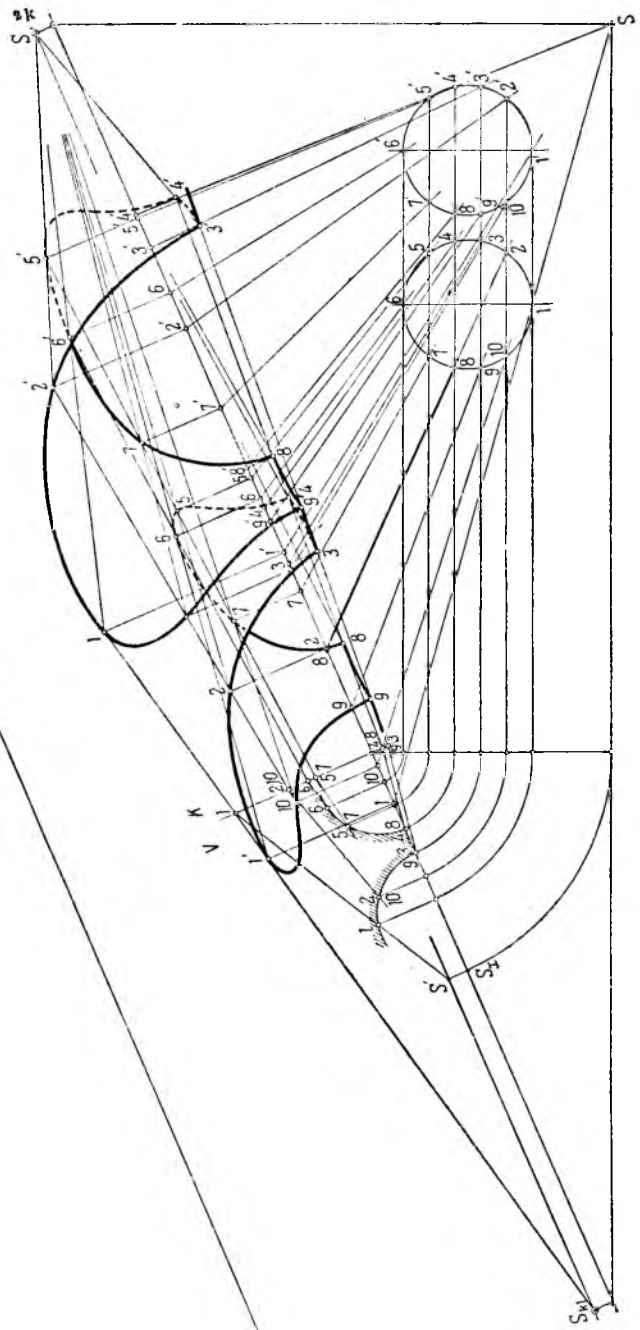


рис. 384. Построение перспективы шара радиальным способом. Сфера.

и D' , найдём на соответствующих лучах, исходящих из S_0 , проведя через точку d перпендикуляр к AB .

Элементы CD и C_1D_1 задней стороны ограды, как горизонтальные отрезки, параллельные картине, изобразятся на перспективе горизонтальными же отрезками $C'D'$ и $C'_1D'_1$.

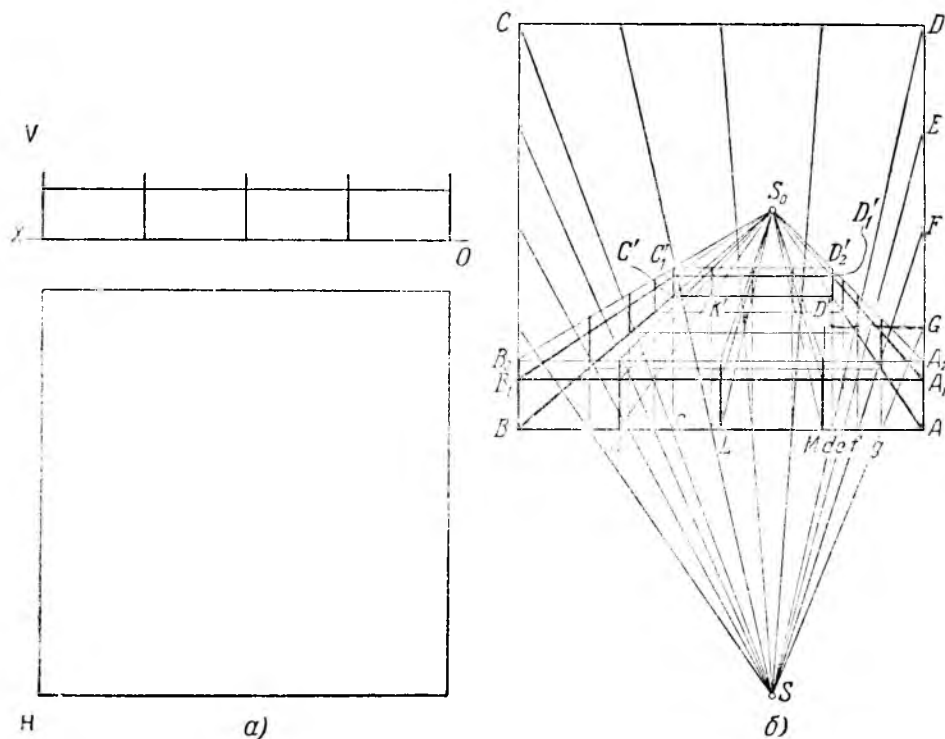


Рис. 385. Построение перспективы ограды радиальным способом.

Проследите за построением перспектив остальных точек.

Точка K' (и некоторые другие—какие именно?) получена как результат пересечения в одной точке не двух, а трёх прямых, что указывает на точность построения.

Рассмотрим ещё один пример.

Требуется построить перспективу домика, данного двумя вертикальными ортогональными проекциями (рис. 386, а).

Строим горизонтальную проекцию домика и на этом же чертеже указываем основания картины и точки зрения (прямая kk и точка s). Для удобства дальнейших построений располагаем kk горизонтально (рис. 386, б). Методом перемены плоскостей проекций строим новую вертикальную проекцию домика. Наносим (на желаемой высоте) линию горизонта (прямая hh) и находим на ней главную точку картины s' . Соединяем главную точку картины с характерными точками только что построенной вспомогательной проекции. На этих лучах-радиусах и находятся искомые перспективы точек (отсюда название «радиальный способ»).

Проследим за построением перспективы какой-либо точки, например точки A .

Соединяем s с a ; в пересечении с kk находим точку a_0 —горизонтальную проекцию перспективы точки A ; сносим точку a_0 на луч $s'a'$ и получаем искомую точку A на перспективе.

Дальнейшие построения не приведены, так как они затемнили бы чертёж. F_1 и F_2 —точки схода горизонтальных прямых, соответственно парал-

лельных сторонам прямоугольника—основания домика (sf_1 и sf_2 параллельны этим же сторонам).

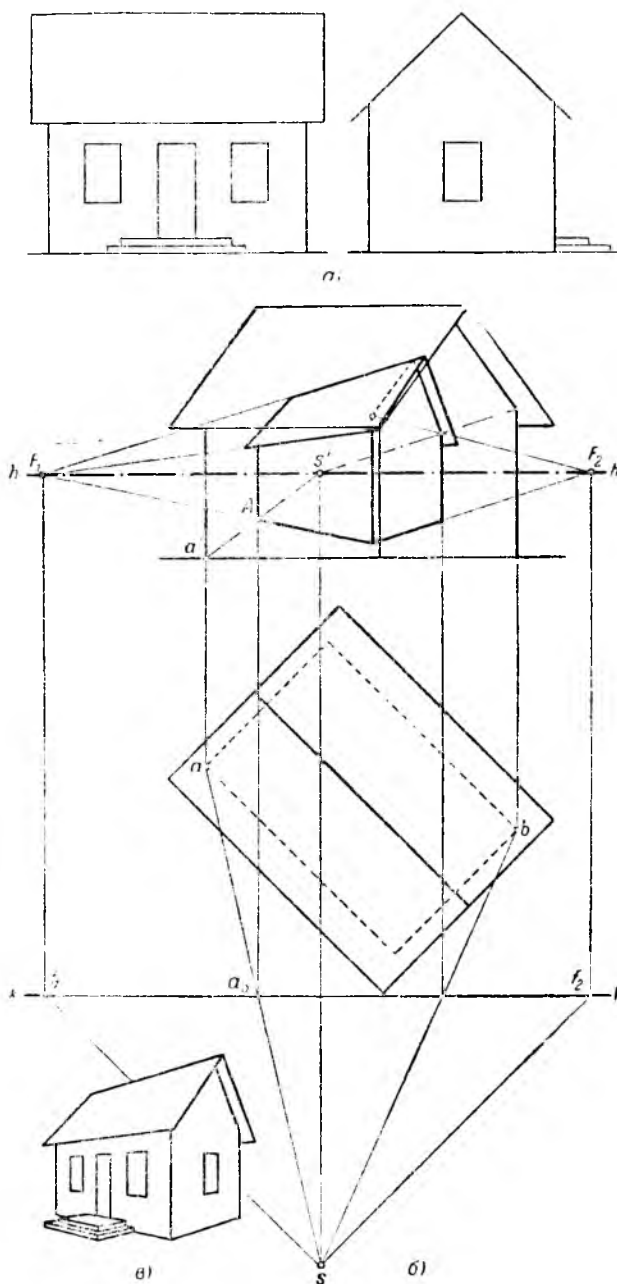


Рис. 386. Построение перспективы домика радиальным способом.

Как видим, при построении перспективы радиальным способом размер чертежа получается меньше, чем при построении перспективы способом, изложенным в § 124.

Однако совершенно очевидны и недостатки радиального метода: необходимо строить вспомогательную проекцию и, кроме того, один чертёж «налезает» на другой. Поэтому при построении перспективы сложного ориги-

нала радиальным методом получается очень запутанный чертёж. Впрочем, можно поступить так: построив вспомогательную прямоугольную проекцию оригинала на картинную плоскость, наложить на чертёж кальку и строить перспективу на ней.

§ 126. Дополнительные указания

Следует заметить, что построение перспективы сложнее, чем построение любой параллельной проекции. Дело не только в том, что на построение перспективы предмета приходится затрачивать больше времени. Можно построить перспективу совершенно правильно с геометрической точки зрения, но она окажется неудачной и её придётся строить по-новому.

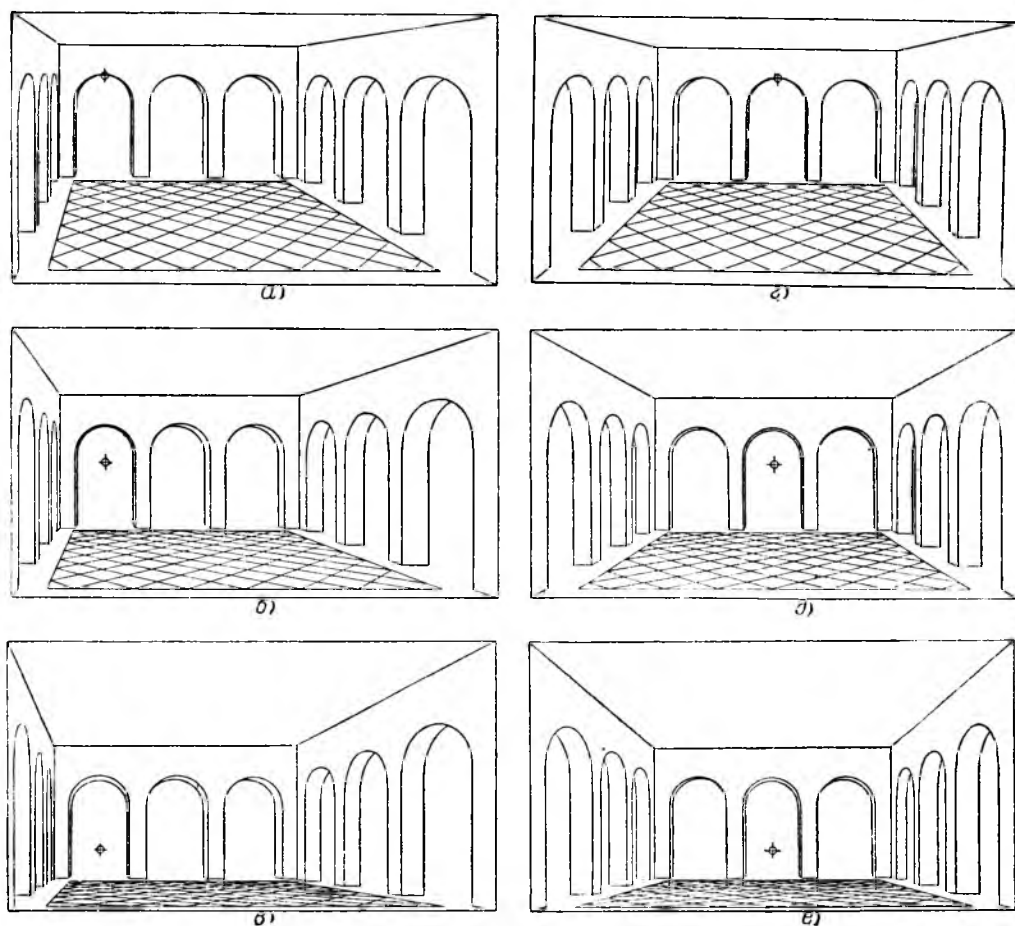


Рис. 387. Шесть перспектив одного зала.

Причина заключается в следующем: при построении ортогональных проекций (метод Монжа) нам нужно выбрать только расположение изображаемого предмета по отношению к плоскостям проекций. При построении аксонометрической проекции нужно, кроме того, удачно выбрать и направление проектирования. При построении же перспективы нужно решить ещё один вопрос: с какой точки зрения рассматривать предмет, т. е. где поместить глаз наблюдателя?

На рис. 387 показано шесть перспектив одного и того же зала при разных точках зрения (картина—передняя стена зала; на ней отмечена главная точка).

Точку зрения выбирают, руководствуясь следующими правилами, выработанными практикой:

1. **Н а и л у ч ш е е** расстояние точки зрения от оригинала равно удвоенному наибольшему «видимому размеру» (B) оригинала (рис. 388). В этом случае угол зрения (т. е. угол, образуемый двумя крайними лучами зрения) равен 28° .

Н а и м е н ь ш е е допустимое расстояние точки зрения от оригинала равно наибольшему видимому размеру оригинала. В этом случае угол зрения увеличивается до 53° .

Наконец, **н а и б о л ь ш е е** допустимое расстояние точки зрения от оригинала равно утроенному наибольшему видимому размеру оригинала. В этом случае угол зрения уменьшается до 18° .

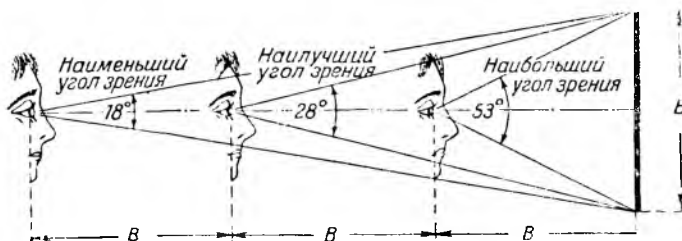


Рис. 388. Углы зрения.

2. Главная точка не должна выходить за пределы средней трети ширины изображения.

При изображении симметричных залов, площадей, дворов часто располагают главную точку в центре ширины картины; такая проекция носит название *центральной фронтальной перспективы* (рис. 387, *г, д и е*). *Боковая фронтальная перспектива* (рис. 387, *а, б и в*) даёт возможность рассмотреть одну из боковых стен более подробно.

3. Высоту горизонта обычно принимают на уровне глаз человека, стоящего на полу (на земле) (рис. 384). Расположение горизонта в пределах средней трети высоты—и особенно посередине высоты—даёт маловыразительное изображение (рис. 387, *б и д*). Повышенный горизонт применяют, например, для построения вида с балкона (рис. 387, *а и е*).

§ 127. Построения на перспективном чертеже

На перспективном чертеже приходится иногда производить те или иные геометрические построения. Для примера рассмотрим такую задачу.

Дана перспектива ящика $ABCDEFGH$; он освещён лампой S , помещённой на столбе Ss . Построим собственную тень ящика, а также тень, падающую от ящика на пол (рис. 389, *вверху*).

Столб Ss вертикален, ребро AE ящика тоже вертикально. Проведём через эти две параллельные прямые вертикальную плоскость V_1 . Горизонтальный след плоскости V_1 определяем, соединив точки s и A . Продолжив sa вправо, получим направление тени, падающей от ребра AE на пол. Тень от точки E находится на луче, проведённом из точки S через точку E , а именно, на пересечении его с продолжением луча sa (на изображении—точка e_0).

Аналогично найдены точки f_0 и g_0 —тени точек F и G . Остальное ясно из чертежа.

Пусть даётся то же условие, но близ ящика оказалась вертикальная стена (рис. 389, *внизу*). Тень точки E остаётся без изменения. Тень от ребра BF остаётся такую же только на участке bb_1 —до встречи с плоскостью стены;

далее тень вертикального ребра оказывается вертикальным же отрезком b_1f' (почему?). Поэтому участок k_0f_0 контура падающей тени заменяется участком k_0f' . Остальное ясно из чертежа.

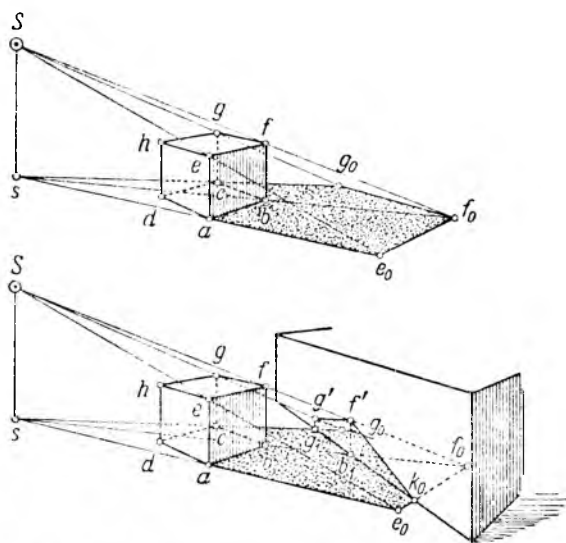


Рис. 389. Построение тени на перспективе.

Упражнение. На стр. 223 помещён рисунок, заканчивающий эту книгу. Постройте тень, падающую на тротуар от надписи, сделанной на стекле; обратите внимание на доведение последней буквы слова «конец».

§ 128. Применения перспективы

Перспектива очень широко применяется в живописи и архитектуре. При изображении на плоском листе бумаги или полотне пространственных предметов необходимо соблюдать правила перспективы.

На рис. 390, а изображена известная картина художника П. А. Федотова «Сватовство майора» (1848 г.). На рис. 390, б показана геометрическая основа построения элементов комнаты. Для того чтобы сосредоточить внимание зрителя на главном лице картины—невесте, художник соответственно выбрал главную точку. Картинная плоскость параллельна задней стене комнаты.

Прежде чем приступают к строительству здания или сооружения, строят его перспективу для того, чтобы заранее знать, каким оно представится нашему глазу в натуре.

На рис. 391, а показан проект подземного зала станции Московского метрополитена «Сокол». Эта перспектива была построена до начала строительства. На рис. 391, б дана фотография этого зала, сделанная с натуры. Как видно из сопоставления этих изображений, правила перспективы позволяют задолго до того, как осуществлено сооружение, изобразить его как раз таким, каким оно нам представится впоследствии.

Приведём пример из практики Государственного Большого театра в Москве. На рис. 392 показаны декорации 4-го действия балета «Дон-Кихот». Для создания у зрителей впечатления большей глубины зала, помещённые на переднем плане четыре арки сделаны не одинаковых размеров, как следовало бы сделать в настоящем зале, а постепенно уменьшающимися—для того чтобы зрителю казалось, что арки находятся на значительных расстояниях друг от друга. На заднем плане—уходящая вдаль аллея; художник

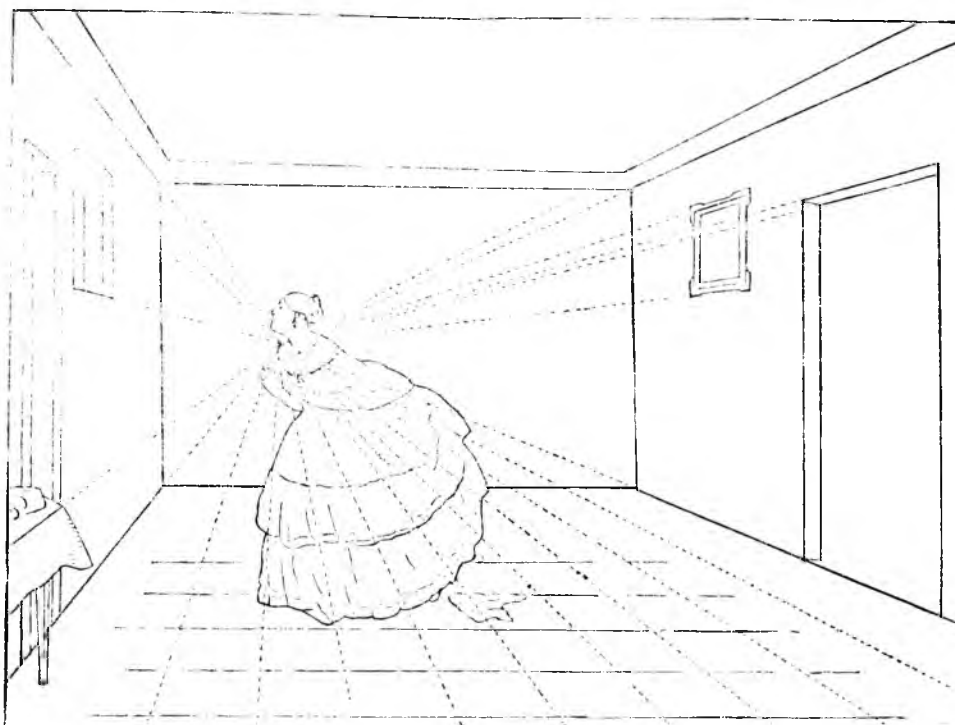
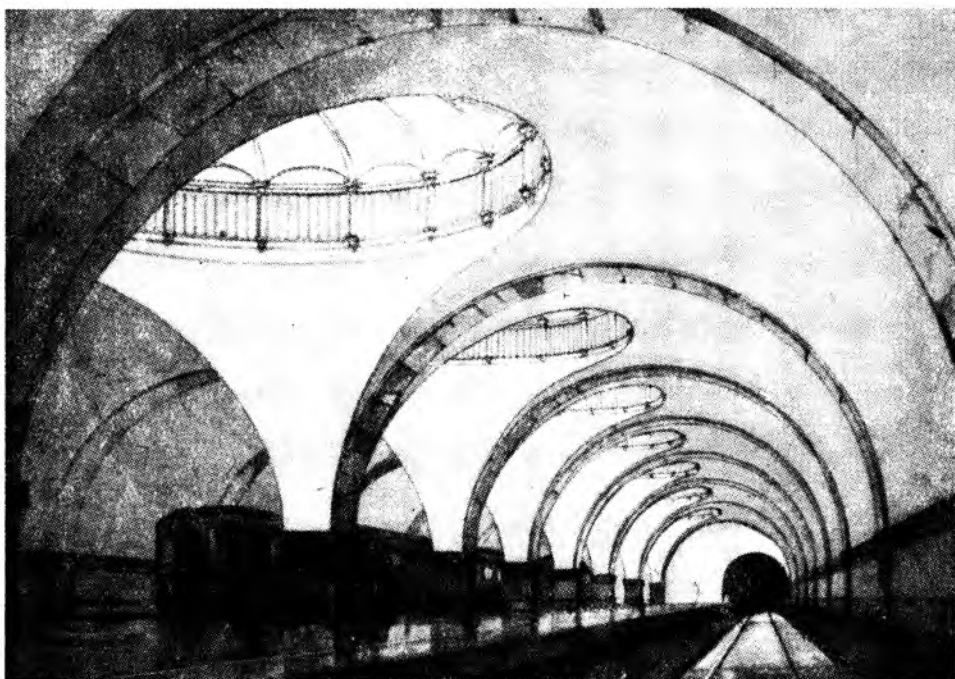


Рис. 390. Картина П. А. Федотова «Сватовство майора».



a)



б)

Рис. 391. Подземный зал станции метро «Сокол».

показал на полотне глубину, нарисовав дальние деревья меньшими, чем ближние.

При съёмке кинокартин, в целях сокращения расходов на устройство декораций широко применяется «перспективное совмещение», сущность которого мы поясним на примере.

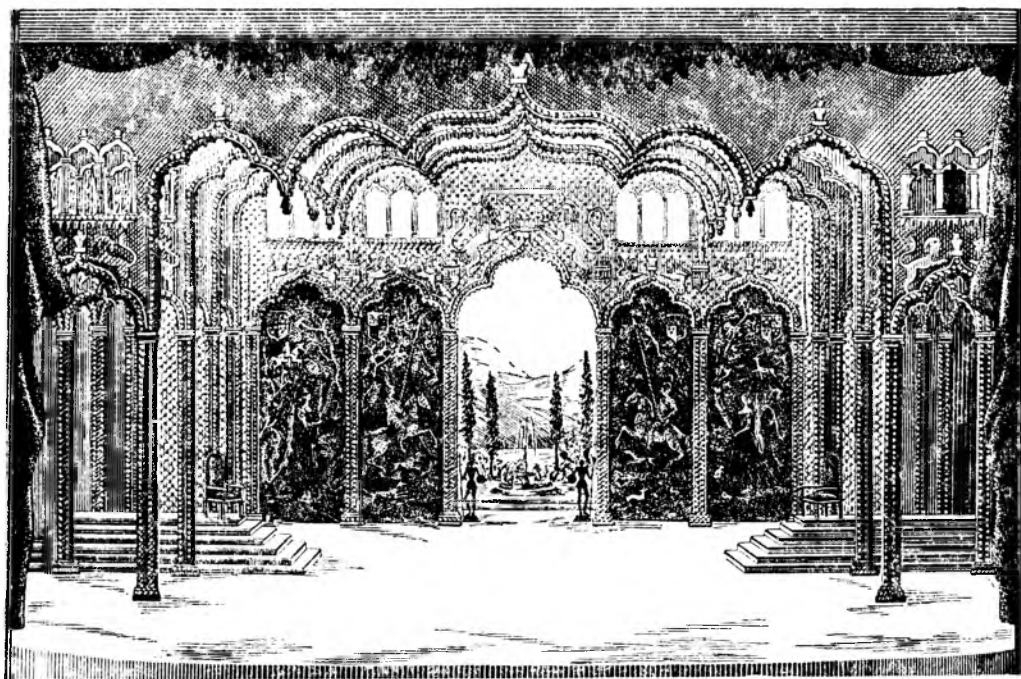
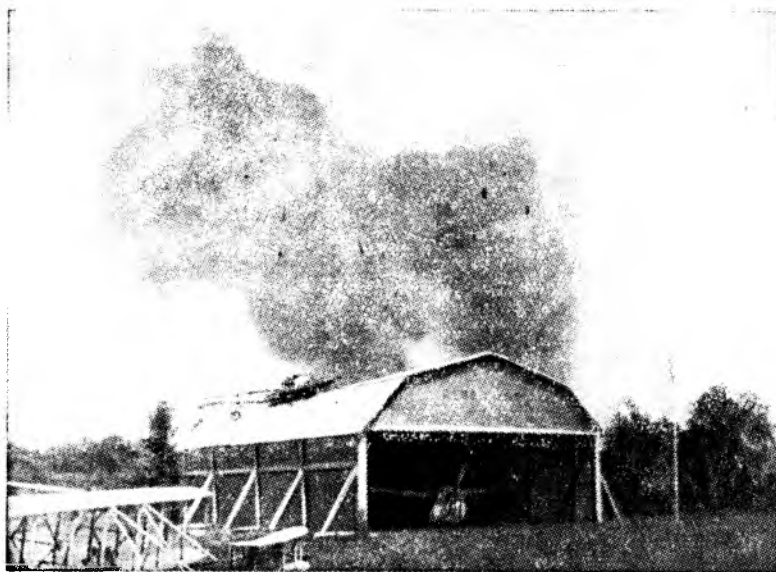


Рис. 392. Декорации 4-го действия балета «Дон-Кихот» в Большом театре (Москва).

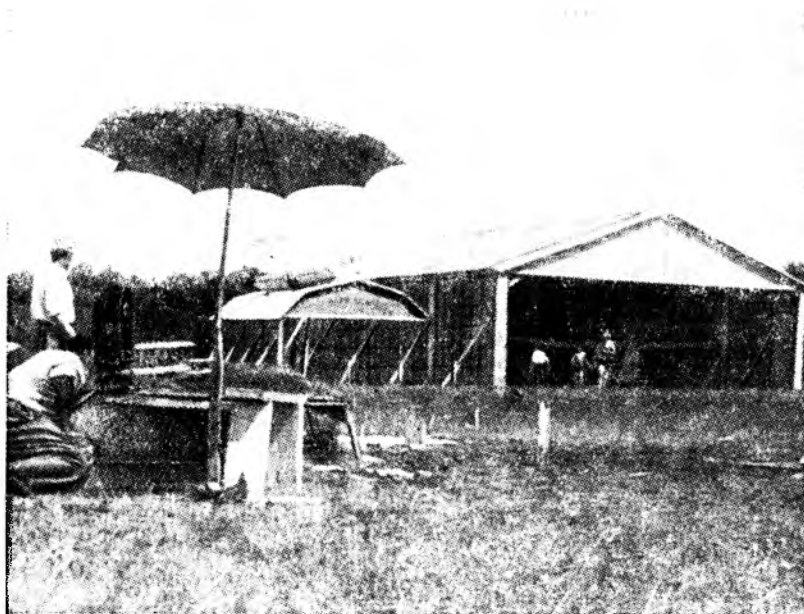
На рис. 393, *а* показан кадр из кинофильма «Жуковский»; зритель видит на экране деревянный ангар, на крыше ангара догорает упавший на неё самолёт, на переднем плане видны части других самолётов. На рисунке 393, *б* показан рабочий момент киносъёмки; на этом снимке видно, что именно происходило на самом деле. Перед съёмочным аппаратом поставили изготовленный в масштабе 1 : 10 натуральной величины макет, состоящий из одной стены и крыши ангара, а также участка земли, покрытого искусственной травой; макет установили на пути лучей фотоаппарата так, чтобы крыша и стена макета спроектировались как раз на крышу и стену деревянного сарая с треугольной крышей; поэтому на кадре 393, *а* получается полное впечатление ангара с многоугольной крышей. По сценарию необходимо показать, что на крышу ангара падает самолёт, из ангара выбегают люди, начинается пожар. Для этого съёмку производили следующим образом: установив макет так, чтобы модель ангара «села» на сарай, начали съёмку; на макет ангара сбросили макет самолёта, вслед за этим из действительного сарая выбежали люди, якобы испуганные ударом самолёта о крышу. Именно этот момент показан на рис. 393, *б*. На рис. 393, *а* показан кадр, снятый через несколько секунд: людей в ангаре уже нет, самолёт догорает.

Для составления карт (планов) местности широко применяется аэрофото-съёмка.

В дне самолёта устраивается люк; над люком устанавливается специальный фотоаппарат, который «смотрит» вниз. Пролетая на определённой высоте



а)



б)

Рис. 393. Применение «перспективного совмещения» при киносъёмке.

(от нескольких сотен до нескольких тысяч метров) над заданной местностью, лётчик ведёт самолёт по прямой линии, а наблюдатель производит последовательно ряд снимков участков местности, расположенных под самолётом; при этом желательно, чтобы в момент съёмки фотоплёнка была горизонтальна; каждый участок земной поверхности должен быть заснят дважды (из двух различных точек).

На языке начертательной геометрии:

Фотоплёнка—картинная плоскость.

Каждый снимок—центральная проекция местности на горизонтальную плоскость.

Одна и та же точка на двух снимках—два изображения точки на двух центральных проекциях.

Сама аэрофотосъёмка производится довольно быстро. Кроме того, производятся наземные работы: определяют высоты и координаты нескольких опорных точек (вершин гор, характерных мест). Снимки проявляют и печатают; дальнейшая работа над снимками производится по правилам начертательной геометрии.

В самом деле, мы располагаем двумя проекциями одного оригинала (участка местности). Но мы в этой книге уже не раз решали задачу: по двум проекциям оригинала построить третью *).

Аэрофотосъёмка требует умения по двум данным центральным проекциям построить проекцию с числовыми отметками. Эта задача несколько сложнее, и для её решения выгодно применять специальные приборы, описание которых выходит за пределы этой книги.

Съёмка местности обычными наземными методами потребовала бы многих месяцев напряжённого труда.

Таким образом начертательная геометрия, используя фотографию и самолёт, даёт возможность во много раз сократить сроки и трудоёмкость работ по составлению карт нашей необъятной Родины.

*) Так, по двум ортогональным проекциям мы строили третью ортогональную—§§ 60, 65, 88; по двум ортогональным строили аксонометрическую—§ 110; по двум ортогональным строили центральную проекцию—§ 124 и т. д.



Редактор *А. З. Рыбкин.*
Техн. редактор *С. П. Ахламова.*
Корректор *Л. О. Сечейко.*

*

Подписано к печати 12/XII 1952 г.
Т-10201. 7 бум. л. 19,1 печ. л.
16,13 уч.-изд. л. 33644 тип. зн. в печ. л.
Тираж 25 000. Цена 4 руб. 85 коп.
Переплёт 1 руб. Заказ № 511.

*

16-я типография Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.